ಮುನ್ನುಡಿ

ಭಾರತೀಯ ಜ್ಞಾನ ಪರಂಪರೆಯ ಎಂದಿಗಿಂತ ಇಂದು ವಿಶ್ವದ ಎಲ್ಲ ದೇಶಗಳ ಗಮನ ಸೆಳೆದಿದೆಯಷ್ಟೆ ಭಾರತದ ಸುವರ್ಣಯುಗದ ಸಹಸ್ರಮಾನವಿದು. ಪ್ರಾಚೀನ ಋಷಿಗಳಿಂದ ಇಂದಿಗೂ ನಮ್ಮ ನಾಡು ಸಂಪದ್ಭರಿತ. ಇಂದಿನ ಯುವ ಜನಾಂಗಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವೀಕರು ಹಾಕಿಕೊಟ್ಟ ಸಾಧನೆಯ ಮಾರ್ಗ ಹಿರಿದಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವಿದು.

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಚಯದ ಈ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ನಮ್ಮ ಕರೆಯ ಮೇರೆಗೆ ಡಾ|| ಶ್ರೀಮತಿ ವೈ.ಎಸ್. ಗಾಯತ್ರೀಯವರು ತುಂಬು ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಾಗೂ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಈ ಗ್ರಂಥ ಪ್ರಕಟಣೆಯ ನೆರವು ದೊರೆಯಲಿದ್ದು, ಶಿಕ್ಷಕವೃಂದದವರಿಗೂ ಇದರ ಪ್ರಯೋಜನವಾಗಲೆಂದು ನಮ್ಮ ಹಾರೈಕೆ. ಅತಿಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ದರ್ಶನ್ ಪ್ರಿಂಟ್ಸ್‌ನ ಎಲ್ಲ ಸಿಬ್ಬಂದಿವರ್ಗದವರು ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಗ್ರಂಥ ಕರ್ತೃ ಡಾ|| ಶ್ರೀಮತಿ ಗಾಯತ್ರೀಯವರಿಗೆ ನಾವು ಆಭಾರಿ ದರ್ಶನ್ ಮುದ್ರಣದವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಅಭಿನಂದನೆಗಳು.

ಎಚ್.ಬಿ. ಲಕ್ಷ್ಮೀನಾರಾಯಣಾಚಾರ್ಯ
ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ವೇದವಿಜ್ಞಾನ ಸಂಸ್ಥೆ
ಬೆಂಗಳೂರು-18

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ
ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಚಯ

ಡಾ|| (ಶ್ರೀಮತಿ) ವೈ.ಎಸ್. ಗಾಯತ್ರಿ

ಪ್ರಕಾಶಕರು :
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಇನ್‌ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ವೇದಿಕ್ ಸೈನ್ಸಸ್
58, ರಾಘವೇಂದ್ರ ಕಾಲೋನಿ, ಚಾಮರಾಜಪೇಟೆ,
ಬೆಂಗಳೂರು-560 018.

Bharatiya Ganithashastra by Dr. (Smt.) Y.S. Gayathri. Published by National Institute of Vedic Sciences, No. 58, Raghavendra Colony, Chamarajpet, Bangalore-560 018.

First Edition - 2008

Copies : 1000

Pages : 60

Price : 75/-

Printers :
Darshan Prints
#58, Raghavendra Colony,
Chamarajpet, Bangalore-560 018.
Phone : 2691 4637

ಅನುಗ್ರಹ ಸಂದೇಶ

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಚಯ ಇಂದಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹದಾಯಕ. ಪವಿತ್ರ ಭಾರತಭೂಮಿ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ವೇದ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ, ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಸಾಧನೆಯ ಹಿರಿಮೆಗೆ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ. ಡಾ|| ಶ್ರೀಮತಿ ಶ್ರೀ ಗಾಯತ್ರಿ ಅವರ ಈ ಪ್ರಯತ್ನ ಶ್ಲಾಘನೀಯ.

ಅವರಿಗೂ, ಅವರ ಕುಟುಂಬವರ್ಗದವರಿಗೂ ಭಗವಂತನ ಅನುಗ್ರಹ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಆಗಲೆಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತಾ.

ನಾರಾಯಣಸ್ಮರಣೆಗಳು

ಶ್ರೀ ಶ್ರೀ ಶ್ರೀವಿಜ್ಞಾನನಿಧಿತೀರ್ಥ ಶ್ರೀಪಾದಂಗಳವರು

ಲೇಖಕರ ಪರಿಚಯ

ಗ್ರಂಥಕರ್ತರಾದ ಡಾ॥ (ಶ್ರೀಮತಿ) ವೈ.ಎಸ್. ಗಾಯತ್ರೀ, ಶ್ರೀ ಬಾಲಾಜಿ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಕೃತ ಉಪನ್ಯಾಸಿಕೆಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಮೂಲತಃ ವಿಜ್ಞಾನ ಪದವೀಧರರು. ಸಂಸ್ಕೃತ ಪಂಡಿತರ ಮನೆತನ ಹಿನ್ನೆಲೆಯುಳ್ಳ ಇವರು ಸಂಸ್ಕೃತ ವಿದ್ವತ್ ಹಾಗೂ ಸಂಸ್ಕೃತ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪದವಿಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುವರು. ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಇವರು ಮಂಡಿಸಿದ ‘‘ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಶೇಷ ಅಧ್ಯಯನ’’ ಎಂಬ ಸಂಸ್ಕೃತ ಪ್ರೌಢಪ್ರಬಂಧಕ್ಕೆ ಡಾಕ್ಟರೇಟ್ ಪದವಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಗೌರವಿಸಿದೆ. ಅದಲ್ಲದೇ ಇವರು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಹಾಗೂ ಅಂತಾರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಮ್ಮೇಳನಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಪ್ರಬಂಧಗಳನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ ವಿದ್ವಜ್ಜನರ ಪ್ರಶಂಸೆಗೆ ಪಾತ್ರರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಜನಸಾಮಾನ್ಯರ ಸಂಸ್ಕೃತ ಕಲಿಕೆಗಾಗಿ ಅನೇಕ ಸಂಸ್ಕೃತ ಸಂಭಾಷಣಾ ಶಿಬಿರಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ ವೇದಗಣಿತ ತರಗತಿಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದ್ದಾರೆ.

ಲೇಖಕರ ನುಡಿ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಕಠಿಣವೆಂಬ ನುಡಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲೆಡೆಯೂ ಕೇಳುತ್ತಲೇ ಬಂದಿದ್ದೇವೆ. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸಕ್ತ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತಲೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹಿತದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಕೆಲವು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಡಲು ಈ ಮೂಲಕ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಹೊರತರಲು ಅವಕಾಶಮಾಡಿಕೊಟ್ಟ ನ್ಯಾಷನಲ್ ಇನ್ಸ್‌ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ಆಫ್ ವೇದಿಕ್ ಸೈನ್ಸಸ್ ಸಂಸ್ಥೆಗೂ, ಅಕ್ಷರ ಸಂಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದ ಶ್ರೀ ಪ್ರಿಂಟ್ ಸಲ್ಯೂಷನ್‌ನ ಶ್ರೀಧರ ಭಟ್‌ರವರಿಗೂ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಯನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಬೆಂಗಳೂರು
ಮಾಘ ಶುದ್ಧ ಪಂಚಮೀ
ತಾರಣನಾಮ ಸಂವತ್ಸರ
13-2-2005

-ಡಾ|| (ಶ್ರೀಮತಿ) ವೈ.ಎಸ್. ಗಾಯತ್ರಿ

ಪರಿವಿಡಿ

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿ.
   15, 150, 1456, 3,00,000, 32.

2. ಈ ಅಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   ಅರ್ಧ, ಫಲ, ಪೂರ್ಣ, ಶಿವ, ವಿಷ್ಣು, ಲೋಕ, ಭುವನ.

3. ಈ ಪದಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   ಸಾಗರ - ಅಂಕ - ಬಾಣ - ಇಂದ್ರಿಯ
   ಗುಣ - ಖ - ಗ್ರಹ
   ರವಿ - ಶಶಿ - ಋಷಿ - ಲೋಕ
   ರಸ - ಖ - ವೇದ - ಅಗ್ನಿ

4. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪದಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   2005, 64, 376, 1947, 3420000

5. ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ - ಟ
   2000 = ಖ್ + ...
   76 = ಭ ....
   496 = ರಸ .... ವೇದ
   .... = ಗುಣ-ರಸ-ಋಷಿ

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ - ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಚಯ

ಭಾರತ ದೇಶವು ಬಹಳ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಜ್ಞಾನ-ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ನಾಡೆಂಬ ಹೆಮ್ಮೆಗೆ ಪಾತ್ರವಾಗಿದೆ. ಈ ನೆಲದಲ್ಲಿ ಆಧ್ಯಾತ್ಮಿಕ ಚಿಂತನೆ ನಡೆದದ್ದೇನೋ ಸರಿ; ಆದರೆ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಚಿಂತನೆಯು ಇಲ್ಲೆಲ್ಲಿ ನಡೆಯಿತು? ಯಾವಾಗ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳುದ್ಭವಿಸುವುದು ಸಹಜ.

ಸಾಂಸ್ಕೃತಿಕ ಪರಂಪರೆಯ ಪರಿಚಯ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸದೆ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಪರಂಪರೆಯೆಡೆಗೆ ಬರೋಣ. ನಮ್ಮ ಇತಿಹಾಸವು ನಮಗೇನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ? ಸಿಂಧೂ ನದಿಯ ಬಯಲಿನಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ನಾಗರಿಕತೆ ಅರಳಿತ್ತು. ನಗರಗಳ ನಿರ್ಮಾಣ ಅತಿ ಸುಂದರವಾಗಿದ್ದಿತು. ರಸ್ತೆಗಳು ಅಗಲವಾಗಿದ್ದವು. ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದವು. ಮನೆಗಳನ್ನು ಸುಟ್ಟ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತಿದ್ದಿತು. ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳ ರಕ್ಷಣೆಗಾಗಿ ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಉಗ್ರಾಣ ಗಳಿದ್ದವು, ಮುಂತಾದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಓದಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ; ಅಲ್ಲವೆ? ಈ ಎಲ್ಲ ಸಾಧನೆಗಳು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಚಿಂತನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತೆ? ಈ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಚಿಂತನೆಗೆ ಹಿಡಿದ ಕನ್ನಡಿಯಾಗಿವೆ.

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಗಣಿತವನ್ನವಲಂಬಿಸಿವೆ. ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವಿಲ್ಲದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಬಗ್ಗೆ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಈ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವೆಷ್ಟು ಪ್ರಾಚೀನ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಲು ನಾವು ವೇದಕಾಲಕ್ಕೇ ಹೋಗಬೇಕು. ವೇದಕಾಲೀನ ಋಷಿಯಾದ **ಮೇಧಾತಿಥಿಯು ಪರಾರ್ಧ ಎಂದರೆ 10^{12}** ರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರುವನು.

ತೈತ್ತಿರೀಯ ಸಂಹಿತೆಯಲ್ಲಿ ಅಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲವನ್ನೂ ನಾವು ವೇದಗಳಲ್ಲೇ ನೋಡಬಹುದು. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಂತೂ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸಾಧನೆಗಳು ಇಂದಿಗೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಅಂಕಗಣಿತ

ಅಂಕಗಣಿತವು ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದ ಗಣಿತ ಭಾಗ. ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ, ವರ್ಗ, ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನ, ಘನಮೂಲ ಮುಂತಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಈ ವಿಭಾಗವು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ :

ಇಂದು ವಿಶ್ವದೆಲ್ಲೆಡೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ 1,2,3, ಮೊದಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯರು ಅಗ್ರಗಣ್ಯರು.

ಆರ್ಯಭಟನ ಹೆಸರನ್ನು ನೀವು ಕೇಳಿರಬೇಕಲ್ಲವೆ? ಇವನು ಕ್ರಿ.ಶ. 5ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಮಹಾನ್ ಪಂಡಿತ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಬೇರೆಯ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿ ಅಸ್ತಿತ್ವ ಬಂದುದೇ ಇವನಿಂದ.

ಅ) ಇವನು ಅಕ್ಷರಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿರುವನು. ಹೇಗೆ ಗೊತ್ತೆ?

ಅ$=10^0=1$, ಆ$=10^1=10$, ಇ$=10^2=100$, ಈ$=10^3=1000$, ಉ$=10^4=10{,}000$, ಊ$=10^5=1{,}00{,}000$, ಋ$=10^6=10{,}00{,}000$, ೠ$=10^7$, ಌ$=10^8$, ಌ$=10^9$, ಌ$=10^{10}$, ಏ$=10^{11}$, ಐ$=10^{12}$, ಓ$=10^{13}$, ಔ$=10^{14}$.

ಕ್	ಖ್	ಗ್	ಘ್	ಙ್
1	2	3	4	5
ಚ್	ಛ್	ಜ್	ಝ್	ಞ್
6	7	8	9	10
ಟ್	ಠ್	ಡ್	ಢ್	ಣ್
11	12	13	14	15
ತ್	ಥ್	ದ್	ಧ್	ನ್
16	17	18	19	20
ಪ್	ಫ್	ಬ್	ಭ್	ಮ್
21	22	23	24	25

ಯ್	ರ್	ಲ್	ವ್	ಶ್	ಷ್	ಸ್	ಹ್
30	40	50	60	70	80	90	100

ಈ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವುರೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಉದಾ : 1) ಕಥೆ – ಈ ಪದವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ – ಎ = ಏ = 10^{11}
ಥ=17 ಕ$=1=117\text{x}10^{11}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : 2) ಮು = $25 \text{ x } 10^4$
ಮುಖ್ಯ = $2532 \text{ x } 10^4$

ಆ) ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯ ನಿರೂಪಣೆ ಪದ ಸಂಖ್ಯೆಯದು. ಇದಕ್ಕೆ ಭೂತ ಸಂಖ್ಯೆ ಯೆಂದೂ ಕರೆಯುವ ಪರಿಪಾಠವುಂಟು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನಾವು ಛಂದಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾ : ಸೂರ್ಯ, ಚಂದ್ರ, ಏಕ = 1
ನಯನ, ಶ್ರೋತ್ರ = 2
ಅಗ್ನಿ, ತಾಪತ್ರಯ, ಲೋಕ = 3
ವೇದ, ಬ್ರಹ್ಮ = 4
ಬಾಣ, ಇಂದ್ರಿಯ, ಮಹಾಭೂತ = 5 ಇತ್ಯಾದಿ.

ಪದಸಂಖ್ಯೆಯ ಉದಾಹರಣೆ : ನವ ವಸು ಗುಣ ಋಷಿ
9 8 3 7

'ಅಂಕಾನಾಂ ವಾಮತೋ ಗತಿಃ' ಎಂಬ ನಿಯಮದಂತೆ ಈ ಪದಸಂಖ್ಯೆಯು=7389.

ರಸ ಶಶಿ ಗ್ರಹ ಋತು ಮುನಿ
6 1 9 6 7 = 76916

ಇ) ಛಂದಃಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದರ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನೀಗ ಅರಿಯೋಣ. ಯತಿನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ ಛಂದಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಬಳಸುವರು. ಉದಾ : ಶಿಖರಿಣೀ ವೃತ್ತದ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ – 'ರಸೈಃರುದ್ರೈಶ್ಛನ್ನಾ ಯಮನಸಭಲಾಗಃ ಶಿಖರಿಣೀ' ಎಂದು. ಎಂದರೆ ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಪಾದವೊಂದರಲ್ಲಿ ಹದಿನೇಳು ಅಕ್ಷರಗಳಿರುತ್ತವೆ. ರಸ=6, ರುದ್ರ=11 ಅಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಯತಿಯನ್ನು ಹೇಳಬೇಕೆಂದು ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಗುಣಾಕಾರ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ. ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ಮಾನಸಿಕ ಪ್ರಕ್ರಿಯಾಶಕ್ತಿಯು ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರಸಕ್ತ ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ ಮಾರ್ಗಕ್ಕಿಂತಲೂ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಸುಲಭ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರುವರು. ಕೆಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ಥಾನಖಂಡ ವಿಧಾನ : ಈ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಕ್ರಿ.ಶ. ಏಳನೆಯ ಶತಮಾನದಿಂದಾಚೆಗೆ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡನೆಯ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿವರಿಸಿರುವನು- 'ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ಥಾನಬಲದಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ನಂತರ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಮೊತ್ತವೇ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ :

(i) 145 x 12

12	12	12
1	4	5
12		60
4		8
1740		

(ii) 145

12

12

48

60

1740

ಉದಾ (2) :

(i) 145 145

1	2
290	
145	
1740	

ಮೂಲ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ, ವರ್ಗ, ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನ, ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಪರಿಕರ್ಮಗಳೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಸಂಕಲನ-ವ್ಯವಕಲನಗಳನ್ನುಳಿದು ಮುಂದಿನ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಹೇಳಲಾಗುವುದು.

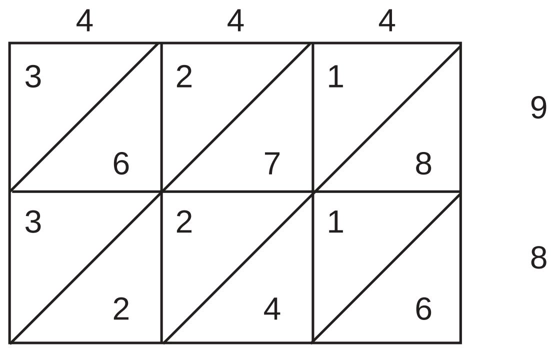
ಗುಣಾಕಾರ

ಗುಣಾಕಾರವು ಬಹು ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ. ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮಗ್ಗಿಯನ್ನು ಕಂಠಪಾಠ ಮಾಡಿಸುವ ಪರಿಪಾಠವಿತ್ತು. ಇದು ಗುಣನಕ್ರಿಯೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಲೆಂದೇ ಈ ಕ್ರಮ ಬೆಳೆದುಬಂದಿತೆಂದರೆ ತಪ್ಪಾಗಲಾರದು. ಭಾರತೀಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಹಾಲಿ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಅನುಸರಿಸುತ್ತಿರುವುದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕೆಲವು ಸುಲಭೋಪಾಯಗಳಿವೆ. ಈ ಉಪಾಯಗಳು 'ಗಣಿತ ಕಷ್ಟದ ವಿಷಯ' ಎಂಬ ಮಾತನ್ನು ತೊಡೆಯುವಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಥವಾಗುವವೆಂದು ನನ್ನ ನಂಬಿಕೆ.

ಗೋಲೇಷಿಯಾ ಪದ್ಧತಿ

432 x 98 ಇವೆರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ಇಂದಿನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಗುಣಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕವಾದ 8ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನಂತರ 9ರಿಂದ ಅವೆರಡರ ಮೊತ್ತ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಮೊತ್ತವೇ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಗೋಲೇಷಿಯಾ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ.

ನಮ್ಮ ಕ್ರಮವನ್ನು ನೋಡೋಣ ಬನ್ನಿ.



= 42336

ವೇದಗಣಿತದ ಸೂತ್ರಗಳು

1. ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ
2. ನಿಖಿಲಂ ನವತಶ್ಚರಮಂ ದಶತ:
3. ಊರ್ಧ್ವತಿರ್ಯಗ್ಭ್ಯಾಂ
4. ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಯೋಜಯೇತ್
5. ಶೂನ್ಯಂ ಸಾಮ್ಯಸಮುಚ್ಚಯೆ
6. (ಆನುರೂಪ್ಯೆ) ಶೂನ್ಯಮನ್ಯತ್
7. ಸಂಕಲನವ್ಯವಕಲನಾಭ್ಯಾಂ
8. ಪೂರಣಾಪೂರಣಾಭ್ಯಾಂ
9. ಚಲನಕಲನಾಭ್ಯಾಂ
10. ಯಾವದೂನಂ
11. ವ್ಯಷ್ಟಿಸಮಷ್ಟಿ:
12. ಶೇಷಾಣ್ಯಂಕೇನ ಚರಮೇಣ
13. ಸೋಪಾಂತ್ಯ ದ್ವಯಮಂತ್ಯಂ
14. ಏಕನ್ಯೂನೇನ ಪೂರ್ವೇಣ
15. ಗುಣಿತ ಸಮುಚ್ಚಯ:
16. ಗುಣಕ ಸಮುಚ್ಚಯ:

ಉಪಸೂತ್ರಗಳು

1. ಆನುರೂಪ್ಯೇಣ
2. ಶಿಷ್ಯತೆ ಶೇಷಸಂಜ್ಞಯಾ
3. ಆದ್ಯಮಾದ್ಯೇನಾಂತ್ಯಮಂತ್ಯೇನ.
4. ಕೇವಲೈ: ಸಪ್ತಕಂ ಗುಣ್ಯಾತ್
5. ವೇಷ್ಟನಂ
6. ಯಾವದೂನಂ ತಾವದೂನಂ
7. ಯಾವದೂನಂ ತಾವದೂನೀಕೃತ್ಯ ವರ್ಗಂಚ ಯೋಜಯೇತ್
8. ಅಂತ್ಯಯೋರರ್ದಶಕೇऽಪಿ
9. ಅಂತ್ಯಯೋರೇವ
10. ಸಮುಚ್ಚಯ ಗುಣಿತ:
11. ಲೋಪಸ್ಥಾಪನಾಭ್ಯಾಂ
12. ವಿಲೋಕನಂ
13. ಗುಣಿತ ಸಮುಚ್ಚಯ: ಸಮುಚ್ಚಯ ಗುಣಿತ:

3) 108 x 109 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು 'ನಿಖಿಲಂ' ಸೂತ್ರ ಬಳಸಿ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದು.

108 – ಇಲ್ಲಿ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 100

ವಿಚಲನ +08

109 – ಇಲ್ಲಿ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 100

ವಿಚಲನ +09

ಮೊದಲು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 9x8ನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕು. ನಂತರ 100+8+9 ಇದರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದಾಗ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

100 – 08
100 – 09
117 / 72

ನಂತರ 100+8+9=117

11772, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

4) 114 x 106 ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ.

100 - 14
100 - 06
12084

5) 102 x 96

100 - +2	9800
100 - -4	- 08
(100+2-4)=98/-08	9792

= 9792 ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

6) 1008 x 984

1000 + +8	992000
1000 - -16	128
992 / -128	991872

(1000-16+8) ಅಥವಾ (1000+8-16)

(i) 984 x 16

16	16	16
9	8	4
144		64
12		8
	15744	

(ii) 984

16
144
128
64
15744

(i) 984 **984**

1	6
984	
5904	
15744	

ಉದಾ (3) :

(i) 456 x 28

28	28	28
4	5	6
112		68
14		0
	12768	

(ii) 456

28
112
140
168
12768

(i) 456 **456**

2	8
912	
3648	
12768	

ಗೋಮೂತ್ರಿಕಾ (Zig Zag) ವಿಧಾನ : ಇದೂ ಸಹ ಸ್ಥಾನ ಖಂಡ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ (1) :

235 x 1223

2	1223	=	2446
3	1223	=	3669
5	1223	=	6115
			287405

ಉದಾ (2) :

1664 x 324

3	1664	=	4992
2	1664	=	3328
4	1664	=	6656
			539136

ಉದಾ (3) :

1664 x 7564

1	7564	=	7564
6	7564	=	45384
6	7564	=	45384
4	7564	=	30256
			12586496

ಭಾಗಶಃ ಗುಣಾಕಾರ : 164 x 18

18 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 10+8 ಎಂದು ಭಾಗಮಾಡಿ, 164ನ್ನು 10ರಿಂದ ಮತ್ತು 8ರಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

(164 x 10) + (164 x 8)

= 1640 + 1312 = 2952

ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನ :

ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿ, ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದ ವಿಷಯವೇ ಆಗಿದೆ. ಈ

ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) 135 x (12 - 2 + 2)

135 x 10 + 135 x 2

= 1350 + 270 = 1620

(ii) 135 x (12 + 8 - 8)

= 135 x 20 - 135 x 8

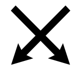
= 2700 - 1080

= 1620

ಶ್ರೀ ಭಾರತೀಕೃಷ್ಣ ತೀರ್ಥರು ರಚಿಸಿರುವ ವೇದಗಣಿತ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಒಂದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾ : 1) 28 x 49

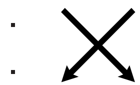
28 ಊರ್ಧ್ವತಿರ್ಯಗ್ಭ್ಯಾಂ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ
49 ಇದರ ಪರಿಹಾರ ಸುಲಭ.

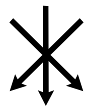
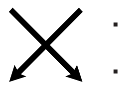
ಮೊದಲನೇ ಹಂತ :  ಎರಡನೇ ಹಂತ : 

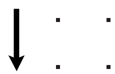
ಮೂರನೇ ಹಂತ : 

ಈ ಅನ್ವಯವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ : 1) 8 x 9
2) 9x2 + 4x8
3) 2x4

= 1372

2) 315 (1)  (2) 

464 (3)  (4) 

(5) 

ಈ ಅನ್ವಯವಾಗಿ ಗುಣಲಬ್ಧವು = 146160

ವರ್ಗಗಳು

ಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗಕ್ರಿಯೆಯೂ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾ : 14 x 14 = 196

5 x 5 = 25

36 x 36 = 1296

ಬೃಹತ್ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರಸಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತ ವೇದಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ.

ಉದಾ : 14^2 10 + 4

10 + 4

18 / 1^6 = 196

104^2 = 100 + 4

100 + 4

10816

'ನಿಖಿಲಂ' ಸೂತ್ರದಿಂದ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡುವಂತೆಯೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನೂ ಮಾಡುವುದು.

2. 124^2 = 100 + 24

100 + 24

148 / 76

15376^5

3. ಉದಾ: 1026^2 =1000 - 26

1000 - 26

1052676

5ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗ.

7) ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸೂತ್ರ 'ಏಕನ್ಯೂನೇನ ಪೂರ್ವೇಣ' ಎಂಬುದು. ಎಂದರೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆ ಎಂದರ್ಥ.

654 - 1 = 653

999 - 653 = 346

653346 ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

8) 7684 x 9999 = 76832316

7684ರ ಪೂರಕ 2316 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪೂರ್ವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 7684 - 1 = 7683 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರೊಡನೆ ಪೂರಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದರೆ 76832316 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

434 x 35 =

1296 x 1308 =

145 x 146 =

2. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಯಾವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು ಸೂಕ್ತ?

454 x 999 =

108 x 119 =

1544 x 1999 =

3. ಸ್ಥಾನಖಂಡ ಮತ್ತು ಗೋಲೇಷಿಯಾ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನನುಸರಿಸಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ.

2473 x 69 =

154 x 98 =

ಭಾಗಾಕಾರ

ಗುಣಾಕಾರದಂತೆ ಭಾಗಾಕಾರವೂ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ 15 ಹಾಗೂ 16ನೇ ಶತಮಾನಗಳವರೆಗೂ ಬಹಳ ಕಷ್ಟವೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸುಲಭ ವಿಧಾನಗಳನ್ನನುಸರಿಸಿ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಪ್ರಾಚೀನ ಜೈನ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. **ಶ್ರೀಧರ, ಮಹಾವೀರ, ಭಾಸ್ಕರ (II)** ಇವರೆಲ್ಲರೂ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅನುಸರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿರುವರು.

ಉದಾ : 1)

1620			
12	1		
420			
12		13	
60			
12			$\boxed{135}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ

ಉದಾ : 2)

1728			
12	1		
528			
12		14	
48			
12			$\boxed{144}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ

ಈ ಕ್ರಮವು ಈಗ ಅನುಸರಿಸುತ್ತಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಹೋಲುತ್ತದೆ. ವೇದಗಣಿತವು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಇವುಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

434 ¸ 20 =

1728 ¸ 144 =

1331 ¸ 11 =

2. ಇವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

456 ¸ 14 =

673 ¸ 11 =

1331 ¸ 13 =

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡ ಘನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಘನವೋ ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ವಿಧಾನ.

ನಾವು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಾಂಕಗಳಿಂದ ತಿಳಿದೆವು.

ಹಾಗೆಯೇ ಬೀಜಾಂಕಗಳಿಂದಲೇ ಸರಿಯಾದ ಘನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೀಜಾಂಕ :

$1^3 = 1x1x1 \quad = 1$

$2^3 = 2x2x2 \quad = 8$

$3^3 = 3x3x3 \quad = 27 = 2+7 = 9$

$4^3 = 4x4x4 \quad = 64 = 6+4 = 10 = 1+0 = 1$

$5^3 = 125 \quad = 1+2+5 = 8$

$6^3 = 216 \quad = 2+1+6 = 9$

$7^3 = 343 \quad = 3+4+3 = 10 = 1+0 = 1$

$8^3 = 512 \quad = 5+1+2 = 8$

$9^3 = 729 \quad = 7+2+9 = 18 = 1+8 = 9$

ಯಾವುದೇ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಬೀಜಾಂಕ 1,8 ಅಥವಾ 9 ಆಗಿರಬೇಕು.

ತಾಳೆ ನೋಡುವ ವಿಧಾನ.

$12^3 = 1728 = 1+7+2+8 = 18 = 9$

ಉದಾ : 1) 25^2 – ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

(a) 2+1=3 (b) 3x2=6 (c) $5^2=25$ (d) $25^2=625$

2) 45^2 ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದನ್ವಯದಂತೆ.

(a) 4x1=5 (b) 4x5=20 (c) $5^2=25$ (d) $45^2=2025$

3) 125^2

(a) 12+1=13 (b) 12x13=156 (c) $5^2=25$ (d) $25^2=625$

4) 155^2

(a) 15+1=16 (b) 15x16=240 (c) $5^2=25$ = 24025

i) $364^2 = \begin{array}{r} 364 \\ 364 \\ \hline 132496 \end{array}$

ii) $6593^2 = \begin{array}{r} 6592 \\ 6592 \\ \hline 4343464 \end{array}$

ಬೃಹತ್ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಊರ್ಧ್ವತಿರ್ಯಗ್ಭ್ಯಾಂ ಸೂತ್ರ ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ತವಾದುದು.

ಬೀಜಾಂಕಗಳು :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದಂಕಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಬೀಜಾಂಕ.

ಉದಾ : 63 = 6 + 3 = 9

264 = 2+6+4 = 12 = 1+2 = 3

1648 = 1+6+4+8 = 19 = 1+9 = 10 = 1+10=1

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸರಿಯಾದ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಹೌದೋ ಅಲ್ಲವೋ ಎಂದು ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^3 = 9$

$4 \times 4 = 4^2 = 16 = 1+6=7$

$5 \times 5 = 5^2 = 25 = 2+5=7$

$6 \times 6 = 6^2 = 36 = 3+6=9$

$7 \times 7 = 7^2 = 49 = 4+9=13=1+3=4$

$8 \times 8 = 8^2 = 64 = 6+4=10=1+0=1$

$9 \times 9 = 9^2 = 81 = 8+1=9$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೀಜಾಂಕವು ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ 1,4,7,9ರಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : $14^2 = 196 = 1+9+6 = 16 = 1+6 = 7$

$36^2 = 1296 = 1+2+9+6 = 18 = 1+8 = 9$

ಮುಂತಾದವು.

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅನುಸರಿಸಿದ ವಿಧಾನ ವಿವರಿಸಿ.

12

17

20

49

216

2454

2. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಿಯಾದ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಾಂಕಗಳಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

36

121

676

5625

15625

ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ. ಘನ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ಇದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಭಾರತೀಯರು ಬಹುದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ಸಮರ್ಥರಾಗಿದ್ದರು.

ಉದಾ : 123^3

ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೇಳಿರುವನು.

(ಅ) ಕೊನೆಯ ಅಂಕದ ಘನ.

(ಆ) ಈ ಅಂಕದ ವರ್ಗದ ಮೂರರಷ್ಟು ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಅಂಕದ ಗುಣಲಬ್ಧ.

(ಇ) ಎರಡನೆಯ ಅಂಕದ ವರ್ಗದ ಮೂರರಷ್ಟನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕದ ಜೊತೆಗೆ ಗುಣಿಸುವುದು.

(ಈ) ಎರಡನೆಯ ಅಂಕದ ಘನ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನಬೆಲೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದಾಂದ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಇರಿಸಿದರೆ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಾಂಕವು ಫಲಿತವಾಗುವುದು.

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ 123^3 ಅನ್ನು ಹೀಗೆ ಮಾಡಬಹುದು.

(i)	1^3	=	1
(ii)	$3 \times 1^2 \times 2$	=	6
(iii)	$3 \times 1 \times 2^2$	=	12
(iv)	2^3	=	8
	12^3		1728

(i)	12^3	=	1 7 2 8
(ii)	$3 \times 12^2 \times 3$	=	1 2 9 6
(iii)	$3 \times 12 \times 3^2$	=	3 2 4
(iv)	3^3	=	2 7
	123^3		1 8 6 0 8 6 7

ಖಾಲಿ ಇರುವ ಭಾಗ 5/8 ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಾದರೂ ಇಳಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯವನ್ನು ಅಂಶವೆಂದೂ, ಭಾಜಕವನ್ನು ಛೇದವೆಂದೂ ಕರೆಯುವರು.

ಉಮಾಸ್ವಾತಿ ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನು ತನ್ನ ''ತತ್ವಾರ್ಥಾಧಿಗಮ ಸೂತ್ರ''ದಲ್ಲಿ ವೇದಾಂತ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಮೆಯನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಹೀಗೆ ಹೇಳಿರುವನು-''ಅಥವಾ ಒಬ್ಬ ಉತ್ತಮ ಗಣಿತ ಪಂಡಿತನು ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸುಲಭ ಗೊಳಿಸಲು ಛೇದ ಮತ್ತು ಅಂಶಗಳೆರಡರಿಂದಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯುವನು. ಇದರಿಂದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ....''

ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕೂಡುವಾಗ ಅಥವಾ ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಕಳೆಯುವಾಗ ಛೇದವು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನು ಸಮಛೇದಕ್ಕೆ ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಳಿರುವನು-ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಎರಡನ್ನೂ ಮತ್ತೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಮೊತ್ತವಾದರೆ ಎರಡನ್ನೂ ಕೂಡಬೇಕು. ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದರೆ ಒಂದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಉದಾ : 1) 2/3 + 1/5

ಮೊದಲ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ 2 ಛೇದ 3

ಎರಡನೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ 1 ಛೇದ 5

ಎರಡೂ ಛೇದಗಳನ್ನು ಸಮ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ

2/3 x 5/5 + 1/5 x 3/3

= 10/15 + 3/15

= 13/15

ಉದಾ : 2) 5/7 – 2/5

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ ಛೇದಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಡಿಕೊಂಡಾಗ

5/7 x 5/5 – 2/5 x 7/7

= 25/35 – 14/35

= 11/35

ಹೀಗೆ ಸಮಾನಛೇದಗಳಿಂದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತಿದ್ದರು.

ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 15, ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 35ನ್ನು ಲಘುತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದವನು ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ. ಇದನ್ನು ಅವನು **'ನಿರುದ್ಧ'** ವೆಂದು ಕರೆದಿರುವನು. ಅವನು ನಿರುದ್ಧದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ

ವರ್ಗಮೂಲ

ಹಾಲಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾಗಾಕಾರ ಹಾಗೂ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನ :

1	125
1	15625
22	1
2	56
245	44
	1225
	1225

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊಡ್ಡದಾದಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನ :

5	15625
5	3125
5	625
5	125
5	25
	5

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $5^2 x 5^2 x 5^2 = 125^2$ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗುವುದು.

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಂಗಡಣೆಯಲ್ಲಿ ದೋಷಗಳು ಸಂಭವಿಸುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು.

ವೇದಗಣಿತದ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಸುಲಭ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ : 1)

	1296
6	3
	3 6

$6^2 - 36 = 0$

ಬಲಗಡೆಯಿಂದ (ಸ್ಥಾನಬೆಲೆಯಂತೆ) ಎರಡೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಬೇಕು. 12ರ ಹತ್ತಿರದ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ 9. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. 12−9=3, ಮುಂದಿನ ಅಂಕ 9. 39 ಅನ್ನು 3x2=6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಭಾಗಲಬ್ಧ 6, ಶೇಷ 3 ಬರುತ್ತದೆ. 36 ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ. $36-6^2=36-36=0$. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲ 36 ಆಗುತ್ತದೆ.

```
16 | 7056        14 | 5625
   |  61            |  72
   ------           ------
     8 4              75
```

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12

11

25

37

113

2. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಿಯಾದ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಾಂಕಗಳಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

81

125

1728

15625

16464

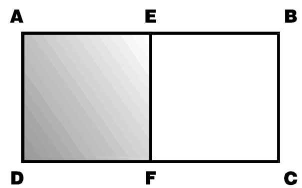
ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

ಭಾರತೀಯರಿಗೆ ಬಹುಹಿಂದಿನಿಂದಲೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಪರಿಚಯವಿದ್ದಿತೆಂಬುದನ್ನು ವೈದಿಕ ಗ್ರಂಥಗಳು ಸಾಬೀತುಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಋಗ್ವೇದದಲ್ಲಿ ಈ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

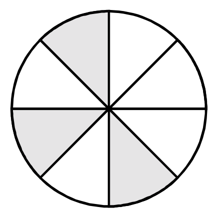
ಅರ್ಧ	1/2
ತ್ರಿಪಾದ	3/4
ಕಲಾ	1/16
ಕುಸ್ಥ	1/12
ಶಫ	1/8
ಪಾದ	1/4

ಶುಲ್ವಸೂತ್ರ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರುವುದಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಭಿನ್ನ ಎಂದರೆ ಭಾಗ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟದ್ದು, ಒಡೆಯಲ್ಪಟ್ಟದ್ದು ಎಂದರ್ಥ.

ಉದಾಹರಣೆ : 1)



ABCDದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು EF ರೇಖೆಯು ABCDಯನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AEFD ಅಥವಾ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗ. ಎಂದರೆ 1/2 ಎಂದರ್ಥ.



ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು 8 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ತುಂಬಿರುವ ಭಾಗವು 3/8,

ತ್ರೈರಾಶಿಕಗಳು

xನ ಬೆಲೆ -y ಆದರೆ kಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬ ಮೂರು ಪದಗಳಿರುವ ಅಥವಾ **ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಚನಕ್ಕೆ ತ್ರೈರಾಶಿಕ**ವೆಂದು ಹೆಸರು. ಪ್ರಮಾಣ ಫಲ ಮತ್ತು ಇಚ್ಛಾ ಎಂಬ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವರು.

ಶ್ರೀಧರನ ತ್ರಿಶತಿಕಾ ಗ್ರಂಥದಿಂದ ಆರಿಸಿದ ಉದಾ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : 1)

ಶ್ರೀ ಗಂಧದ 1ಗ್ರಾಂ ಮತು 250 ಮಿ. ಗ್ರಾಂ. ಪ್ರಮಾಣವು 10 1/2 ಪಣಕ್ಕೆ ದೊರೆತರೆ, 9 ಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು 250 ಮಿ. ಗ್ರಾಂ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಇಲ್ಲಿ ಅ) ಪ್ರಮಾಣ 1 ಗ್ರಾಂ 250 ಮಿಲಿ ಗ್ರಾಂ.
ಬ) ಪಲ=10½
ಕ) ಇಚ್ಛಾ=9¼

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ
ಅ) 5/4 ಬ) 21/2 ಕ) 37/4 ಆಗುತ್ತ ವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

2) 5/4 ರ ಬೆಲೆ –21/2 ಆದರೆ 37/4 ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
37/4 x 21/2/5/4
= 37/4 x 21/2 x 4/5
= 21 x 37/10
= 807/10
= 80 7/10

ಉದಾಹರಣೆ : 3) 5 ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆ 40ರೂ.ಗಳಾದರೆ 13 ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂ. ಕೊಡಬೇಕು?
ಅ) ಪ್ರಮಾಣ = 5
ಆ) ಫಲ = 40
ಇ) ಇಚ್ಛಾ = 13
5 ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆ ರೂ.40 ಆದರೆ 13 ತೆಂಗಿನಕಾಯಿಗಳ ಬೆಲೆ?
13 x 40/5
=13 x 8
=104 ರೂ.ಗಳು.

ನೀಡಿರುವನು– '**ಛೇದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಹಾಗೂ ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ನಿರುದ್ಧ**'.

ಉದಾಹರಣೆ : 1) 1/2 + 1/4 & 3/5
ಇಲ್ಲಿ ಛೇದಗಳು 2, 4, 5 ಆಗಿವೆ.
ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ – 2, 4, 5
2, 1, 2, 5
ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರುದ್ಧವು 2 x 2 x 5 = 20
(10+5–3)/20 = 12/20
= 4/5

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಂತೆ ಗಣಿತದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲೂ ನಡೆಸಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯೆ 3/7 ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳಾದ 2 ಹಾಗೂ 3 ನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ 6ನ್ನು ಅಂಶದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕು. ಅಂತೆಯೇ ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ 21ನ್ನು ಛೇದದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ 2/3x3/7ರ ಗುಣಲಬ್ಧವು 6/21 ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ $(2/3)^2 = 4/9$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವರ್ಗ ಹಾಗೂ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರುವನು. ಅನಂತರ ಬಂದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಇವನ ನಿಯಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿರುವರು. ಎಂದರೆ ಅಂಶದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಅಂಶದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, ಛೇದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಛೇದದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗುವುದು.

ಉದಾ–1) Ö16/25 = Ö225/441 = 15/21 ಇದನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದಾಗ 5/7 ಆಗುತ್ತದೆ. ಘನ ಮತ್ತು ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

+1/3=(6+1)/3=7/3

2 1/7= ಅನ್ನು ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನು ಗಣಿತಸಾರಸಂಗ್ರಹ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಇರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಅನೇಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿರುವನು. ಈ ನಿಯಮಗಳು ಬೇರಾವ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲೂ ಕಂಡುಬಂದಿಲ್ಲ.

1) ಸಂಖ್ಯೆ 1ನ್ನು ಅನೇಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು :

ನಿಯಮವು ಹೀಗಿದೆ :

ವಿವಿಧ ಅಂಕಗಳು ಛೇದದಲ್ಲಿದ್ದು ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಇದ್ದರೆ ಆಗ ಛೇದಗಳು 1ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಎಲ್ಲ ಛೇದಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲನೆಯ ಛೇದವನ್ನು

ಸಂಖ್ಯೆ 2ರಿಂದಲೂ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಛೇದವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ 2/3ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಬೇಕು'.

ಬೀಜಗಣಿತದ ನಿಯಮದಂತೆ

$1=1/2+1/3+1/3^2+1/3^3+................+1/3^{n-2}+1/2.3^{n-2}$

2) ಸಂಖ್ಯೆ 1ನ್ನು ಅನೇಕ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು :

ವಿವಿಧಾಂಕಗಳ ಅಂಶವು ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗಿದ್ದಾಗ ಛೇದಗಳು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಗೊಂಡು, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಅದನ್ನು ಅರ್ಧ ಮಾಡಿದರೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ'.

$$1 = \frac{1}{2.31/2} + \frac{1}{3.4.1/2} + \frac{1}{4.5.1/2} + \frac{1}{(2n-1)2n.1/2} + \frac{1}{2n.1/2}$$

ಹೀಗೆ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯುಳ್ಳ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸಿರುವನು. ಹೀಗೆ ಅವನು ಅನೇಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವನು. ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರಲೆಂದು ಒಂದೆರಡು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ :

1) 10ಗ್ರಾಂ. ಮೆಣಸಿಗೆ 7/8 ರೂಗಳಾದರೆ 6/5 ಗ್ರಾಂ. ಮೆಣಸಿಗೆ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
6/5ಪಲ ಮೆಣಸಿಗನ ಬೆಲೆ = 7/8 x 6/5
= 42/40 ರೂ.ಗಳು

2) ಮಿತ್ರನೆ, ನೀನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, 2 1/3 ಮತ್ತು 2 1/7 ಹಾಗೂ 1/3 ಮತ್ತು 1/2ರ ಗುಣಲಬ್ಧ ವನ್ನು ಬೇಗ ಹೇಳು.

2 1/3 ಅನ್ನು ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ (2 x 3)+1/3=7/3
2 1/7 ಅನ್ನು ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ (2 x 7)+1/7=15/7
7/3 x 15/7 = 21/105
= 3/15 = 1/5
1/3 x 1/2 = 1/6

ಅಭ್ಯಾಸ

ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತ ತಿಳಿಸಿ :

1. 1/7 + 3/8 + 1/4
2. 16 1/4 + 9 3/4 + 12 1/8
3. 3/8 + 1/12 + 3/15 + 2/9
4. 6/11 + 3/22 + 5/11
5. ಮಿತ್ರನೆ, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, ಹಾಗೂ 1/6 ರ ಮೊತ್ತವೇನು? ಇದನ್ನು 3 ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?
6. 1/14 – 1/63 ರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?
7. **ಸಮಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :**
   (31/2+1/4)ರ (31/2+ 1/6)ರ(312/+1/4 ರ 31/2)
8. **ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :**

ಅ) 7/2 x 5/4 x 7/6

ಆ) 1/2 x 3/4 x 1/4

ಇ) 1 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಈ) 1 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವಲ್ಲಿ ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನ ನಿಯಮವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

9. ಇವುಗಳ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ :
   2/3, 41/2, 11/3, 2 3/4
10. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳೇನು?
    4/9, 256/625, 81/225, 169/196
11. **ಈ ಗಣಿತ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸರಿಯೋ ತಪ್ಪೋ ತಿಳಿಸಿ :**
    i) 1/3 + 2/3 =1
    ii) Ö41/4 = 2 1/2
    iii) 4, 6, 8 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. =12
    iv) 3 – 1/3 = 2/3
    v) 1/2 = 1/4 x 1/4

ಶತ-ಮಾನ

ಸಂಖ್ಯೆ 100ಕ್ಕೆ ಸಮವಾದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ‘ಪ್ರತಿಶತ’ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 100ರಲ್ಲಿ 8 ಭಾಗವನ್ನು 8% ಎಂದರೆ 8 ಪ್ರತಿಶತ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಶತ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿವೆ.

ಉದಾ-

ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ	ಭಿನ್ನರಾಶಿ	ಪ್ರತಿಶತ %
0.2	1/5	20
0.35	7/20	35
0.75	3/4	75
0.5	1/2	50

ಉದಾ : 1) ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ 45% ಮಹಿಳೆಯರು ಇರುವರು. ಆ ನಗರದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 64,100 ಆದರೆ, ಆ ನಗರದಲ್ಲಿರುವ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

45% = 0.45

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 0.45ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

64,100 x 0.45 = 28845.00

ನಗರದಲ್ಲಿರುವ ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ = 28845

ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ = 64100 - 28845

=35255

45/100 x 64100 ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಅನಂತರ ಅಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ನಗರದಲ್ಲಿರುವ ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರ ಸಿಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ವೇದಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಕ್ರಮವು ಪ್ರಸಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ.

ಉದಾ : 2) ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 35% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಬರುವರು. ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 1200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಾಧನಗಳಿಂದ ಬರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದನ್ನೇ ಅನುಪಾತವೆಂದು ಕರೆಯುವುದು.

ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧ **ಸಮ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತಗಳೆಂದು.** ಪ್ರಮಾಣವು ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ಫಲವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮಾಣವು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಫಲವೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುಕ್ಕೆ ಸಮಾನುಪಾತವೆನ್ನುವರು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುವುವೇ ಆಗಿವೆ.

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದನೆಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವನೊಬ್ಬನೇ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದರೆ ಒಂದು ದಿವಸ ಸಾಕಾಗಬಹುದು. ಅವನೊಡನೆ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಸೇರಿಕೊಂಡರೆ ಕೆಲಸವು ಬೇಗನೆ ಪೂರೈಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಪ್ರಮಾಣವು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಫಲವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು ಅಥವಾ ಪ್ರಮಾಣವು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಫಲವು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತವೆನ್ನು ವರು.

ನಾವು ದಿನನಿತ್ಯ ಕಾಣುವ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು-

1) ಕೆಲಸ - ವ್ಯಕ್ತಿ -ಕಾಲ
2) ಆಹಾರ - ಜನ -ಪ್ರಮಾಣ
3) ಜನಸಂಖ್ಯೆ - ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು ಮುಂತಾದವು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಪಂಚ-ಸಪ್ತ-ನವರಾಶಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಚೀನರು ನಿಪುಣರಾಗಿದ್ದರು.

ಪಂಚರಾಶಿಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನನುಸರಿಸಿಯೇ ಬಡ್ಡಿ ವ್ಯವಹಾರವನ್ನೂ ಸಹ ಮಾಡುವುದು.

ಉದಾ 1) ರೂ 100ಕ್ಕೆ 3/4 ತಿಂಗಳಿಗೆ 5 1/5 ಬಡ್ಡಿಯಾದರೆ 62 1/2 ರೂ.ಗೆ 3 1/5 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಡ್ಡಿ ಸಂದಾಯವಾಗಬೇಕು?

100 : 62 1/2 :: 26/5 : x

3/4 ತಿ : 5 1/5 ತಿ

\ x = 26/5 x 125/2 x 16/5 x 3/4 = 39/5

= 7 4/5

ಉದಾ 2) ರೂ 100ಕ್ಕೆ ತಿಂಗಳೊಂದಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ ರೂ.5 ಆದರೆ, 16 ರೂ.ಗಳಿಗೆ 12 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ತಗಲುವ ಬಡ್ಡಿ ಏನು?

100 : 16 :: 5 : x

1 : 12

\ x = 5 x16 x12/1 x 100

= 48/5

= 9 3/5 ರೂ. ಗಳು.

= ರೂ. 9.60

ಉದಾ 3) ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯು ಘಂಟೆಗೆ 200 ಕಿ.ಮೀ.ವೇಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಿದೆ. ಅದು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಗಮ್ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೇರಲು 2 ಘಂಟೆಯಾದರೆ ಗಮ್ಯಸ್ಥಾನದ ದೂರವೆಷ್ಟು? ಅದರ ವೇಗದಲ್ಲಿ 50 ಕಿ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಅದು ಗಮ್ಯವನ್ನು ಸೇರಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲವೆಷ್ಟು ?

ಉಗಿಬಂಡಿಯ ವೇಗ – 200 ಕಿ.ಮೀ./ಘಂಟೆಗೆ
ಸೇರುವ ಸಮಯ – 2 ಘಂಟೆ
\ ಗಮ್ಯದ ದೂರ = ವೇಗ x ಸಮಯ
= 200 x 2 = 400 ಕಿ.ಮೀ.
ಅದರ ವೇಗದಲ್ಲಿ 50ಕಿ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ಆದಾಗ ವೇಗ = 150 ಕಿ.ಮೀ.
ದೂರ =400 ಕಿ.ಮೀ.
\ ತಲುಪುವ ಸಮಯ= ದೂರ /ವೇಗ
= 400/150
= 2 2/3 ಘಂಟೆಗಳು
= 2 ಘಂಟೆ 40 ನಿಮಿಷಗಳು.
ಇದು ಯಾವ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ವಿಲೋಮಾನುಪಾತ.

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಸಮಾನುಪಾತ ಹಾಗೂ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತಗಳಿಗೆ ನಿಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.
2. ಒಂದು ವಿಮಾನವು 5 ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 4000 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಿದರೆ 3 ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಹಾರಬಲ್ಲದು?
3. ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನಿಗೆ 5 ದಿನಗಳ ಭತ್ಯೆ ರೂ.235 ಆದರೆ 27 ದಿನಗಳ ಭತ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
4. ಕಾರೊಂದು 3 ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 135 ಕಿ.ಮೀ. ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದರೆ 400 ಕಿ.ಮೀ. ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು?
5. ಎಕರೆ ಭೂಮಿಗೆ 280 ಚೀಲ ಭತ್ತ ಬೆಳೆದರೆ 220 ಚೀಲ ಬೆಳೆಯಲು ಎಷ್ಟು ಎಕರೆ ಭೂಮಿ ಇರಬೇಕು?
6. ತಿಂಗಳೊಂದಕ್ಕೆ 5% ಬಡ್ಡಿಯಾದರೆ, 65ರೂ.ಗಳಿಗೆ 5 ತಿಂಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?
7. ರಾಮ ಮತ್ತು ಕೃಷ್ಣ 2 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹಣವನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿದರು. ಅವರಿಗೆ ಬಂದ ಲಾಭ ರೂ. 1200ಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಹಂಚಿಕೊಂಡರು. ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಲಾಭಾಂಶ ಬಂದುದು ಯಾರಿಗೆ?
8. 14ಮೀ. x 12ಮೀ x 16 ಮೀ ಅಳತೆಯ 30 ಮರದ ಹಲಗೆಗಳ ಬೆಲೆ ರೂ.1000. ಇದಕ್ಕಿಂತ 4ಮೀ. ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ 14 ಹಲಗೆಗಳ ಬೆಲೆ ಏನು?

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಈ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತ ವೇನು?

i) 1, 3, 5, 7, ----------13

ii) 2,4,6,--------20.

iii) 1,4,9,16,-----------144.

iv) 1,8,27, 64,------------3375

ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1200

ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 35%

ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1200 x 0.35

= 420.00

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಾಧನಗಳಿಂದ ಬರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1200–420

= 780

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರದಿಂದ ತುಂಬಿ–

	ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ	ಭಿನ್ನರಾಶಿ	ಪ್ರತಿಶತ %
1.	0.2	--------	--------
2.	-------	1/8	--------
3.	--------	---------	40%
4.	--------	1/6	--------

2. ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ 100 ತೆಂಗಿನ ಮರಗಳು, 35 ಮಾವಿನ ಮರಗಳು, 12 ಹುಣಿಸೆಮರಗಳಿವೆ. ಪಕ್ಕದ ಇನ್ನೊಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ 12 1/2% ತೆಂಗಿನ ಮರಗಳು, 20% ಮಾವಿನ ಮರಗಳು, ಮತ್ತು 1/2 ಭಾಗ ಹುಣಿಸೆ ಮರಗಳಿದ್ದರೆ, ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಮರಗಳೆಷ್ಟಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.

3. ರಮೇಶ, ಮಹೇಶ ಮತ್ತು ಸುರೇಶ ಎಂಬ ಮೂರು ಜನ ಮಿತ್ರರು ಸೇರಿ ವ್ಯಾಪಾರವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ಮಹೇಶನು ರಮೇಶನ 1/3ರಷ್ಟು, ರಮೇಶನು ಸುರೇಶನ 1/8 ರಷ್ಟು ಬಂಡವಾಳ ಹೂಡಿದರು. ಇವರ ಬಂಡವಾಳದ ಅನುಪಾತವೇನು?

4. ಒಂದು ಜಿಲ್ಲೆಯ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 2,48,000. ಇವರಲ್ಲಿ 1/8ರಷ್ಟು ಅಕ್ಷರಸ್ಥರು, 38% ಮಹಿಳೆಯರು, 0.12ರಷ್ಟು ವೃದ್ಧರು, 1/16ರಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳು ಇರುವರು. ಈ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಅನಕ್ಷರಸ್ಥರ, ಪುರುಷರ, ವೃದ್ಧರ ಹಾಗೂ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಾಭ-ನಷ್ಟ :

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವೂ ಪ್ರತಿಶತವನ್ನೇ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಲಾಭ-ನಷ್ಟಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸ ಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿಶತದಲ್ಲೇ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.ಉದಾ : ವ್ಯಾಪಾರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ಲಾಭ ಅಥವಾ ನಷ್ಟವಾಯಿತು ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಚಾರ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆಯೇ ಪರಿಹರಿಸತಕ್ಕದ್ದು.

ಶ್ರೇಢಿಗಳು :

ಸಮಾನ ವ್ಯತ್ಯಯವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಶ್ರೇಢಿಗಳು. ಇವು ಎರಡು ವಿಧ-ಸಂಕಲಿತ ಹಾಗೂ ಗುಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳೆಂದು. ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಸಮಾನಾಂತರವಿರುತ್ತದೆ. ಗುಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಸಮಾನ ಅನುಪಾತವಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ : ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿ -

1) 1,2,3,4,5,6,-------------

2) 1,4,7,10, 13, --------------

3) 2,4,6,8,10,----------------

1) 1,3,5,7,9,11,--------------

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದಕ್ಕೂ ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೂ ಸಮಾನ ಅಂತರವಿದೆ.

1) (2-1)= (3-2)= (4-3)

2) (4-1)= (7-4)= (10-7)

ಗುಣಿತಶ್ರೇಢಿ -

1) 2, 4, 8, 16, 32, 64, -------------

2) 3, 9, 27, 81, 243, -------------

3) 6, 36, 216, 1296, -----------

ಈ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಸಮಾನ ಅನುಪಾತವಿದೆ.

1) 4/2 = 8/4 = 16/8 = 2

2) 9/3 = 27/9 = 81/27 = 3 ಮುಂತಾಗಿ.

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಿಗೆ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಹೇಳಿರುವರು. ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನು-ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಹೇಳಿರುವನು-

$1 + 2 + 3 + 4 + ... n = n\ (n+1)/2$

$1 + (1+2) + (1+2+3) + ... (1 + 2 + 3 + ... + n) = n\ (n+1)\ (n+2)/6$

ಉದಾ : 1) ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಅ) $1 + 2 + ... + 13$

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ ಮೊತ್ತ

$n\ (n+1)\ /\ 2$ ಇಲ್ಲಿ $n = 13$

$13 \times (13+1)/2$

$=13x14/2$

$=13x7=91$

B) $1 + (1+2) + (1+2+3) + ... (1 + 2 + 3 + ... + 13)$

ಇಲ್ಲಿ n=13

$(n+1) = 13+1 = 14$

$(n+2\ ) = 13+2 = 15$

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಂತೆ ಮೊತ್ತ

$= n\ (n+1)\ (n+2)\ /\ 6$

$= 13 \times 14 \times 15\ /\ 6$

$= 13 \times 7 \times 5 = 455$

4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2 = n\ (n+1)\ (2n+1)/6$

5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = [n\ (n+1)/2]^2$

$S = n/2\ [2a+(n-1)d]$

ಇದು ಸಂಕಲಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮ

ಗುಣಿತಶ್ರೇಢಿ -

ಗುಣಿತಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ $S = a(r^n -1)/(r-1)$

ಇಲ್ಲಿ a ಮೊದಲಪದ ಹಾಗೂ r ಸಮಾನುಪಾತ.

ಉದಾ - 1) ಮಿತ್ರನೆ, ಮೊದಲ ದಿನ ರೂ.2 ಹಾಗೂ ಮಾರನೆಯ ದಿನದಿಂದ 3ರ ಗುಣಕದಂತೆ ನೀಡಿದರೆ 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಕೊಟ್ಟಂತಾಗುವುದು?

a=2 r=3 n=10 S=?

$S= a(r^n -1)/(r-1)$

$= 2(3^{10} - 1)\ /3-1$

$=2(58649 -1)/2$

$=58648$

ಬೆಲೆಯನ್ನವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತವೆ. ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲೂ ಕೂಡ ಒಂದು, ಎರಡು ಹಾಗೂ ಅನೇಕಾವ್ಯಕ್ತಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಋಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರ ಸಮವೆಂದು ಹೇಳಿದರೆ '=' ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. '='ಚಿಹ್ನೆಯ ಎಡಬದಿ ಹಾಗೂ ಬಲಬದಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾ :

ಅ) $a + 2 = 4$

ಬ) $a + 2 = 0$

ಕ) $a + 1 = 3$

ಡ) $a + 2 = 1$

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನ ಸಮವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ನಿರ್ವಿವಾದ. ಈತನು ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪದ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವನು. ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಹಾಗೂ ತಾಂತ್ರಿಕ ವಿಷಯವಾದ ಗಣಿತವನ್ನು ಛಂದಸ್ಸಿಗಳವಡಿಸುವುದು ಒಂದು ವಿಶೇಷವಾದರೆ, ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕೃತಿಯನ್ನು ವರ್ಣಿಸುತ್ತಾ ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಡಿಸುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಶೇಷ. ಗಣಿತ ಹಾಗೂ ಕವಿತಾ ಪ್ರತಿಭೆಗಳ ವಿಶೇಷ ಸಮ್ಮಿಲನವೇ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನೆಂದರೆ ತಪ್ಪಾಗಲಾರದು. ಈತನ ಗ್ರಂಥವಾದ **ಲೀಲಾವತಿ**ಯು ಇಂದಿಗೂ ತನ್ನ ಪ್ರಖ್ಯಾತಿಯನ್ನುಳಿಸಿ ಕೊಂಡಿರುವುದು ಈ ಗುಣಗಳಿಂದಲೇ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

೧) **यूथार्धं सत्रिभागं वननिवरगतं कुञ्जराणां च दृष्टं**
षड्भागश्चैव नद्यां पिबति च सलिलं सप्तमांशेन मिश्रः ।
पद्मिन्यां चाष्टमांशः स्वनवमसहितःक्रीडते स्वानुरागो
नागेन्द्रो हस्तिनीभिस्त्रिभिरनुगतः का भवेद्यूथसङ्ख्या ॥

ಒಂದು ಆನೆಗಳ ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಆನೆಗಳು 1/3ಭಾಗದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಗುಹೆಯನ್ನು ಹೊಕ್ಕವು. 1/6 ಭಾಗ ಮತ್ತು ಅದರ 1/7 ಭಾಗದಷ್ಟು ಆನೆಗಳು ನದಿಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಕುಡಿಯುತ್ತಿದ್ದವು. 1/8 ಭಾಗ ಮತ್ತು ಅದರ 1/9 ಭಾಗದಷ್ಟು ಆನೆಗಳು ಕಮಲಗಳು ತುಂಬಿದ ಕೊಳದಲ್ಲಿ ಆಟವಾಡುತ್ತಿದ್ದವು. ಸಲಗವು 3 ಹೆಣ್ಣಾನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಚಿನ್ನಾಟದಲ್ಲಿ ನಿರತವಾಗಿದ್ದಿತು. ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಹೀಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಆ ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಆನೆಗಳೆಷ್ಟು?

ಭಂಗ-ವಿಕಲ್ಪಗಳು :

3 ಅಂಕಗಳಿವೆಯೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಉದಾ : 2, 3, 4. ಈ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಎರಡಂಕಿಯ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು; ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಷ್ಟು ಬಗೆ ಎನ್ನುವ ಬಗೆಗೆ ವಿವರಿಸುವ ಸಾಧನವೇ ಭಂಗವಿಕಲ್ಪಗಳು. ಇಲ್ಲಿ ಉದಹರಿಸಿರುವ ಮೂರಂಕಿಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಎರಡಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು – 23, 34, 24, 42, 43 ಮತ್ತು 36.

ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು – 234, 423, 342, 324, 243, 432. ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಆಯ್ಕೆ ಹಾಗೂ ಜೋಡಣೆಗೆ ಭಂಗ – ವಿಕಲ್ಪಗಳೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲು ಸೂತ್ರ ರಚಿಸಿದವನು ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ.

${}^{n}p_{r} = n!/(n-r)!$

$1x2x3 = 3!$

$4x3x2x1 = 4!$

ಎಂದರೆ $n!$ ಅರ್ಥ 1 ರಿಂದ n ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು.

ಹಾಗೆ ರಚಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ಭಾರತೀಯರ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ.

${}^{n}C_{r} = n!/(n-r)!r!$

ಮೊತ್ತ $S = (n-1)! \ (10^{n}-1) \ x$ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ/9

ಉದಾ : 2, 3, 4 ಅಂಕಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$= {}^{3}p_{3} = 3x2x1 = 6$

ಮೊತ್ತ $S=(n-1)! \ (10^{n} -1)/9$

$= 2 \ x \ (10^{3} -1) \ x \ 9$

$= 2 \ x \ 999 \ x \ 9/9$

$= 1998$

ಒಂದು ಕುತೂಹಲ ಹುಟ್ಟಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆ-

ವಿಷ್ಣುವಿನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ವಸ್ತುಗಳಿವೆ. ಅವು ಶಂಖ, ಚಕ್ರ, ಗದಾ ಮತ್ತು ಪದ್ಮಗಳು. ಇವುಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯ ವಿಷ್ಣುವಿನ ಪ್ರತಿಮೆಗಳಾಗಬಹುದು?

${}^{4}p_{4} = 4! = 4 \ x \ 3 \ x \ 2 \ x \ 1 = 24$

(ದೈನಂದಿನ ಕರ್ಮವಾದ ಸಂಧ್ಯಾವಂದನೆಯಲ್ಲೂ ವಿಷ್ಣುವಿನ 24 ನಾಮಗಳಿವೆಯೆಂಬುದನ್ನು

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಮರಿಸಬಹುದು.)

ಅಭ್ಯಾಸ

1) 1,4, ಮತ್ತು 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ಮೂರಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವುವು? ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

2) 4,5,6,7,9 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು (ಅ) ಮೂರಂಕಿ (ಆ) ನಾಲ್ಕಂಕಿ, (ಇ) ಐದಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು? ಹಾಗೆ ರಚಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರ?

3) ಷಡ್ರಸಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ರಸಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದ ವ್ಯಂಜನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

ಬೀಜಗಣಿತ

ಬೀಜಗಣಿತವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಮುಖ ವಿಭಾಗ. ಇಲ್ಲಿ ಬೀಜಾಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೇ ಎಲ್ಲ ಗಣಿತ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ನಡೆಸಲಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಅವ್ಯಕ್ತ ಗಣಿತವೆಂದು ಇನ್ನೊಂದು ಹೆಸರು. ಭಾರತೀಯರು ಬಹು ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನೂ, ಬೈಜಿಕ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲಕವೂ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇದು ಅವರಿಗೆ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿದ್ದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ನಿದರ್ಶನವಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನಾವು ವೇದಕಾಲದಿಂದಲೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯರು ಸಿದ್ಧಹಸ್ತರು. ಒಂದು ಅಜ್ಞಾತವಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಎರಡು ಅಜ್ಞಾತವಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಅನೇಕಾ-ಜ್ಞಾತಗಳಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು, ವರ್ಗ-ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಕುಟ್ಟಕಗಳು ಮುಂತಾದ ಎಲ್ಲ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಚೀನರು ನಿಷ್ಣಾತರು. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಇಂದಿಗೂ ನಾವು ಶ್ರೀಧರಾಚಾರ್ಯನ ಮತವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತವೆಂದರೇನು?

ಈ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಅವ್ಯಕ್ತ ಗಣಿತವೆಂದೂ ಹೇಳಿದೆ. ಅವ್ಯಕ್ತವೆಂದರೆ ತಿಳಿಯದೆ ಇರುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ಎಂದರೆ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗಣಿತಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು. ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ, ಮುಂತಾದ ಗಣಿತಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೇ ನಡೆಸುವುದು. ಇಂದಿನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು a,b,c,x,y, ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಭಾರತೀಯರು 'ಯಾ', 'ಕಾ', 'ಪೀ', 'ನೀ', 'ಲೊ', ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವರು.

ಉದಾ :
$$a + a = 2a$$
$$a - a = 0$$
$$a \times a = a^2$$
$$a \div a = 1$$

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ a ಎಂಬುದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವಾಗಿದೆ. ಇದರ ಬೆಲೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದು. ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಗುಣಲಬ್ಧ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮುಂತಾದವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ

$5a + 2$ ಈ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೊಂದರಂತೆ ಬರೆಯಬೇಕು. ನಂತರ ಒಂದೇ ತರಹದ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು. ಈ ಕೂಡುವಿಕೆ ಅಂಕಗಣಿತದಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ದಶಕ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

$$\begin{array}{r} 5a + 2 \\ \underline{10a + 4} \\ \underline{15a + 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x - 4 \\ \underline{7x + 11} \\ \underline{17x - 7} \end{array}$$

ವ್ಯವಕಲನವನ್ನೂ ಹೀಗೆಯೇ ಮಾಡತಕ್ಕದ್ದು.

$3p - 5$ ಇಲ್ಲಿ **'ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಯೋಜಯೇತ್'** ಎಂಬ ಸೂತ್ರವು ನಮ್ಮ ಸಹಾಯಕ್ಕೆ

$2p - 7$ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದ ಅರ್ಥ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಕೂಡಬೇಕು ಎಂದು. ಎಂದರೆ '+' ಚಿಹ್ನೆಯಿದ್ದರೆ '–' ಆಗುತ್ತದೆ. '–' ಚಿಹ್ನೆಯಿದ್ದರೆ '+ 'ಆಗುತ್ತದೆ. ನಂತರ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $p+2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$(12x^2 - 5x + 3) - (15x^2 - 5)$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಂತೆ ಇದರ ಪರಿಹಾರ

$$\begin{array}{rrr} 12x^2 & -5x & +3 \\ -15x^2 & -0x & +5 \\ -3x^2 & -5x & +8 \end{array}$$

ಗುಣಾಕಾರ -

$(2x+3)(3x+2)$ ಗುಣ್ಯ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೊಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

$2x+3$

$3x+2$

ಇಲ್ಲಿ ಮೂರು ಹಂತಗಳಿವೆ

i) $2x \times 3x = 6x^2$

ii) $(2x2 + 3x3)x$

$= 4+9 = 13x$

iii) $3 \times 2 = 6$

ಗುಣಲಬ್ಧವು $6x^2+13x+6$ ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಅಂಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದಂತೆಯೇ **'ಊರ್ಧ್ವ ತಿರ್ಯಗ್‌ಭ್ಯಾಂ'** ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು.

ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಿರಲಿ.

ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಆನೆಗಳು = 4

ಗುಹೆಯನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಿದ ಆನೆಗಳು = $1/2 + 1/2 \times 1/3$

ನದಿಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಕುಡಿಯುತ್ತಿದ್ದ ಆನೆಗಳು = $1/6 + 1/6 \times 1/7$

ಕಮಲದ ಕೊಳದಲ್ಲಿ ಆಡುತ್ತಿದ್ದ ಆನೆಗಳು= $1/8 + 1/8 \times 1/9$

ಆನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ =

$x - [x(1/2 + 1/2 \times 1/3)] - [x(1/6+1/6 \times 1/7)] - [x(1/8+1/8 \times 1/9)]$

$= 4$

$x-x[2/3+4/21+5/36] =4$

$$\frac{1}{252}x = 4$$

$\therefore x = 252 \times 4$

$= 1008$

ಆ ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿ ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1008.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

२) **अमलकमलराशेस्त्र्यंशपञ्चांशषष्ठैः**
त्रिनयनहरिसूर्या येनतुर्येण चार्या ।
गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपद्मैः
स्कलकमलसङ्ख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य ॥

ಒಂದು ಕಮಲದ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ 1/3 ಭಾಗವನ್ನು ಶಿವನಿಗೂ, 1/5 ಭಾಗವನ್ನು ವಿಷ್ಣುವಿಗೂ, 1/6ಭಾಗವನ್ನು ಸೂರ್ಯನಿಗೂ, 1/4 ಭಾಗವನ್ನು ದೇವತೆಗಳಿಗೂ ಪೂಜಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅರ್ಪಿಸಲಾಯಿತು. ಉಳಿದ ಆರು ಪುಷ್ಪಗಳನ್ನು ಗುರುವಿಗೆ ಅರ್ಪಿಸಲಾಯಿತು. ಆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹೂವುಗಳೆಷ್ಟು?

ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಇರಲಿ.

ಶಿವನಿಗೆ ಅರ್ಪಿಸಿದ ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ–1/3

ವಿಷ್ಣುವಿಗೆ ಅರ್ಪಿಸಿದ ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ–1/5

ಸೂರ್ಯನಿಗೆ ಅರ್ಪಿಸಿದ ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ-1/6...

ದೇವತೆಗಳಿಗೆ ಅರ್ಪಿಸಿದ ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ-1/4

ಗುರುವಿಗೆ ಅರ್ಪಿಸಿದ ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 6

$$x - [x(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4})] = 6$$

$$\frac{1}{20} x=6 \quad \backslash \quad x= 20x6=120$$

\ ಆ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ120.

೩) पञ्चांशोऽलिकुलात्कदम्बमगमत्र्यंशं शिलीन्ध्रं तयोः
विश्लेषस्त्रिगुणे मृगाक्षि कुटजं डोलायमानोऽपरो ।
कान्ते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रिया
दूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृङ्गोऽलिसङ्ख्यां वद ॥

ಮೃಗನಯನೆಯೆ, ದುಂಬಿಯ ಗುಂಪೊಂದು ಹಾರಾಡುತ್ತಿತ್ತು . ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 1/5 ಭಾಗವು ಕದಂಬ ವೃಕ್ಷವನ್ನೂ, 1/3 ಭಾಗವು ಶಿಲೀಂಧ್ರ ವೃಕ್ಷವನ್ನೂ ಸೇರಿದವು. ಅವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮೂರರಷ್ಟು ದುಂಬಿಗಳು ಕುಟಜ ವೃಕ್ಷಕ್ಕೆ ತೆರಳಿದವು. ಒಂದು ದುಂಬಿಯು ಕೇತಕೀ ಹಾಗೂ ಮಾಲತೀ ಪುಷ್ಪಗಳ ಸುಗಂಧದಿಂದ ಆಕರ್ಷಿತವಾಗಿ ಇತ್ತಿಂದತ್ತ ಹಾರುತ್ತಿತ್ತು. ಅಲ್ಲಿದ್ದ ದುಂಬಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳು.

ಕದಂಬ ವೃಕ್ಷದಲ್ಲಿದ್ದ ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1/5

ಶಿಲೀಂಧ್ರ ವೃಕ್ಷದಲ್ಲಿದ್ದ ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1/3

ಕುಟಜ ವೃಕ್ಷಕ್ಕೆ ತೆರಳಿದ ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3 1/3 – 1/5 x 3
ಹಾರಾಡುತ್ತಿದ್ದ ದುಂಬಿ =1
ದುಂಬಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ a ಇರಲಿ.

$$[a - a(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}) -(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) \ 3] = 1$$

$$a - a[\frac{8}{15}-\frac{6}{15}] = \frac{1}{15}a=1$$

\ a = 15x1
= 15

ಅಲ್ಲಿದ್ದ ದುಂಬಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯ=15

ಹೀಗೆ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನು ಅವ್ಯಕ್ತ ರಾಶಿಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಬಗೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿರುವನು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳೂ ಹೆಚ್ಚು ಮನದಟ್ಟಾಗುವುವು.

ಸಮೀಕರಣಗಳು-

ನಾವು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಬೇಕು ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾ a=10

a 10ಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನಾವು ಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ a=10 ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇವೆರಡರ ಮೊತ್ತ (4a =40) + (5a =50)
4a + 5a = 50 +40
9a = 90

ಉದಾ 2) y=3, 2y=6
$2y \times 2y = 4y^2 = 4 \times 36 = 144$
4a, 5a, 2y, $4y^2$ ಇವುಗಳನ್ನು **'ಪದಗಳು'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ **'ಬಹುಪದ'** ಎಂದು ಹೆಸರು.

$4y^2$ ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿ 4ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಾಂಕವೆಂದೂ, 2 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದೂ ಹೇಳುವರು.

ಏಕಪದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ-
i) 2x (ii) $4a^3$ (iii) 5a (iv)$4y^2$

ದ್ವಿಪದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ-
$x + 10, \ x^4 + 2x^3, \ 3x^2 + 12,$

ತ್ರಿಪದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ-

$2x + 3y-z, \ x^2 + y^2+4, \ ax + by + cz$

ಬಹುಪದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ-

$4x^3 + 3y^2 + 5a - 2, \ (a+b)^4, (x+y)^3$ ಮುಂತಾದವು.

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ-

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಅವ್ಯಕ್ತ ಗಣಿತ ಎಂದರೇನು?
2. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಏಕಪದ, ದ್ವಿಪದ, ತ್ರಿಪದ ಮತ್ತು ಬಹುಪದಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.
3. ಮೊತ್ತವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ–

i) $(x + 5),(x-8) , (x+2)$

ii) $(x^2 +12x+35),(x^2 +8x+12),(x^2 -10x+25)$

iii) $(x^2 +12a+3), (x^2 +5),(a-4)$

4. ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ–

i) $(2x-4)- (x-6)$

ii) $(y^2 +8y-1) - (2y^2-7y-1)$

iii) $(2a^3+3a^2 -5a+6)- (4a^3+2a^2 +3a-4)$

5. ಇವುಗಳ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ–

$2x, -5a^3 4y^2 b, -x.$

6. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ತಿಳಿಸಿ–

iv) $(p^3 - 6p^2+12p-8)/(p-2)$

8. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗೊಳಿಸಿ–

i) $6x^2+5x+1$

ii) $p^2-9p+20$

iii) a^2-64

iv) $4x^2-12xy+9y^2$

ಉದಾ : 2) $(5x^2 +3x+6) (2x-1)$

$5x^2 +3x+6$

$2x-1$

i) $6 x -1 = -6$ ಊರ್ಧ್ವ

ii) $[(3x-1)+(6x2)]$ ತಿರ್ಯಕ್

iii) $[(6x0) +(3x2)+(5x-1)]x^2 =(0+6-5)x^2 =x^2$ ಊರ್ಧ್ವ–ತಿರ್ಯಕ್

iv) $[(5x2) +(3x0)]x^3 =(10+0)x^3$ ತಿರ್ಯಕ್

v) $3x0=0$ ಊರ್ಧ್ವ

ಗುಣಲಬ್ಧವು $10x^3 + x^2+ 9x-6$

$(x^2+ 5x-6)/(x-1)$

ಇಲ್ಲಿ **'ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಯೋಜಯೇತ್'** ಸೂತ್ರವನ್ನು ವ್ಯವಕಲನದಂತೆ ಅಳವಡಿಸಲಾಗುವುದು. ಅದರಂತೆ

$x-1) x^2+ 5x-6$ 1 5 -6

+1 1 +1 +6

1 +6 0

ಭಾಗಲಬ್ಧ = $x+6$

ಶೇಷ =0

ಪ್ರಸಕ್ತ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ ವಿಧಾನ ಇದು–

$x-1) x^2 + 5 x -6 (x+6$

x^2-x

$0+6x-6$

$6x-6$

0 0

ಇದು–ಯಾವ ವಿಧಾನ ಸುಲಭ? ನೀವೇ ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ಉದಾ : 2) $(x^3 -15x^2+ 75x-125)/ (x-5)$

$x-5)x^3 -15x^2+ 75x-125($ 1 -15 75 -125

+5 1 +5 -50 +125

-10 +25 0

ಭಾಗಲಬ್ಧ = x^2 -10x+25

ಶೇಷ =0

ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಹುಬೇಗ ಭಾಗಾಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತಿಯು ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

ಅಪವರ್ತನಗಳು :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವೂ ಅಪವರ್ತನ ಸಂಜ್ಞೆಯನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತವೆ.

ಉದಾ-12 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1,2,3,4,6 ಮತ್ತು 12 ಆಗುವವು.

27 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 1, 3, 9 ಮತ್ತು 27 ಆಗುವವು.

ಹೀಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲೂ ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಬಹುದು.

ಈ ಕ್ರಿಯೆಗೆ **'ಆನುರೂಪ್ಯೇಣ'** ಹಾಗೂ **'ಆದ್ಯಮಾದ್ಯೇನಾಂತ್ಯಮಂತ್ಯೇನ'** ಎಂಬ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

x^2 +8x+12

x^2 +6x+2x +12

ಈ ಪದವನ್ನು ಅನುಪಾತಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ಎರಡು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

x^2 +6x 2x +12

ಇವುಗಳ ಅನುಪಾತವು 1:6 ಹಾಗೂ 2:12

1:6 1:6

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಪವರ್ತನವು x+6

'ಆದ್ಯಮಾದ್ಯೇನಾಂತ್ಯಮಂತ್ಯೇನ' ಸೂತ್ರವು ಭಾಜಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದಿಂದ ಭಾಜ್ಯದ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನೂ, ಭಾಜಕದ ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ ಭಾಜ್ಯದ ಕೊನೆಯ ಪದವನ್ನೂ, ಭಾಗಿಸಬೇಕೆಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದವು x^2. ಇದರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $x^2/x = x$. ಕೊನೆಯ ಪದವು +12/+6=+2 ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಅಪವರ್ತನವು x +2

2) x^2 +12x+35

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಈ ಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳು :

x^2 +7x+5x +35

x^2 +7x 5x +35

1:7 5:35

1:7 1:7

ಮೊದಲನೆಯ ಅಪವರ್ತನವು x+7 ಎಂದು ಆಗುವುದು.

ಎರಡನೆಯ ಅಪವರ್ತನವು x + 5 ಎಂದು ಆಗುವುದು.

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

$x=b_1c_2 - b_2c_1$

$a_2b_1 - a_1b_2$

$y = b_1c_2 - b_2c_1$

$x=a_2b_1 - a_1b_2$

$c_1 a_2 - a_1c_2$

$y=a_2b_1 - a_1b_2$

$2x + y = 5$

$3x-4y= 2$

$a_1=2 \quad b_1=1 \quad c_1=5 \quad a_2=3 \quad b_2=-4 \quad c_2=2$

$$x=\frac{1x2--4x5}{3x1-2x-4}=\frac{22}{11}=2$$

$$\frac{5x3-2x2}{3x1-2x-4}=\frac{15-4}{3+8}= \quad =1$$

ಹೀಗೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಮಾನಸಿಕ ವೇಗವು ಹೆಚ್ಚುವಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರಗಳು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆ .

ಅನೇಕಾವ್ಯಕ್ತಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಏಕಕಾಲಿಕ-ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯರು ನಿಪುಣರೆಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧಿಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವರು. ಅಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನೀಗ ಪರಿಹರಿಸೋಣ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಆರ್ಯಭಟೀಯ ಭಾಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಕಾಡಿನಲ್ಲಿ ಆನೆಗಳ ನಾಲ್ಕು ಹಿಂಡುಗಳಿದ್ದವು. ಅಲ್ಲಿ ಮದಜಲವನ್ನು ಸುರಿಸುತ್ತಿದ್ದ, ಮದಜಲವಿಲ್ಲದ, ಹೆಣ್ಣಾನೆಗಳು, ಆನೆಮರಿಗಳೂ ಇದ್ದವು. ಒಂದೊಂದು ಹಿಂಡಿನಲ್ಲೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 30,36,49,50 ಇದ್ದವು. ಒಟ್ಟು ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

ಒಟ್ಟು ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \; x_4$ ಇರಲಿ.

$$\frac{1\times 1-3-b}{1\times 4-3-c}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು-

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಮೊತ್ತವು 12 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

$+3 = 12$

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9. ಅದು ಹೇಗೆ? 12−3=9

ಇದನ್ನು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸಬಹುದು.

$x+3=12 \quad \therefore \quad x=12-3$

$=9$

9ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ವೇದಗಣಿತದ ಸೂತ್ರ **'ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಯೋಜಯೇತ್'**ನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಲಾಗುವುದು.

ಆಗ

− + ಆಗಿ ,+ −.÷×

ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ.

$x+5=8$

$x=8 -5=3$

$3a=21$

$a=21\div$ **3**

5x+4= 2x+1 ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಎಂದರೆ **ax+b=cx+d** ಆದರೆ,

x= ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ a=5, b=4,c=2,d=1.

ಈ ನಿಯಮದಂತೆ $x=\frac{\ddot{d}-b}{a-c}$

$$\frac{\ddot{d}-b}{a-c}=\frac{1-4}{5-2} = \quad = \mathbf{-1}$$

$$+x=2x -\frac{2}{3}$$

$$a=1,b=\frac{3}{4},\ c=2,d= -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad -\frac{3}{4}$$

1-2

$$= -\frac{17}{12} \quad = +\frac{17}{12}$$

-1

$$\frac{ax+b}{cx+d} =$$ ಸಮೀಕರಣವು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ $x = \frac{bq-dp}{cp-aq}$

ಉದಾ-

$$= \frac{1}{5}$$

a=2,b=5, c=3,d=7,p=1,q=5

$$x = \frac{bq-dp}{cp-aq}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$\frac{2x5-7x1}{3x1-2x5}$$

$$=$$

$$\backslash \quad x = \frac{3}{-7}$$

ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತವುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿದಾಯಿತು. ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಪರಿಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಜೊತೆಯಲ್ಲೇ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ 'ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

x +y =5 -------- (1)

x-y =1 --------(2)

x= 1+y

1+y+y =5

1+2y=5

2y=5-1

2y=4

y=2

y=2 ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

x+2 =5

x=5-2

x=3

$$\boxed{\begin{array}{c} x=3 \\ y=2 \end{array}}$$

ಇದೇ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವು ವೇದಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಗಿದೆ ನೋಡೋಣ ಬನ್ನಿ . **'ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಯೋಜಯೇತ್'** ಸೂತ್ರವನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

x +y =5 x - 1 -------- (1) -x - y = -5 -----(3)

x-y =1 x 1--------(2) x - y =1 ------(4)

ಸಮೀಕರಣ (3) (4) ರಿಂದ -2x = -4

ಆದ್ದರಿಂದ x=2

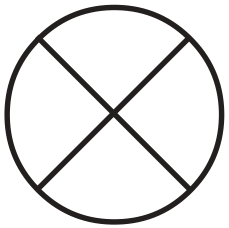
ನೋಡಬಹುದು. ಈ ಮೂರೂ ವೇದಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು ಸಮವೆಂದೂ, ಒಂದು ಚದುರ **ವ್ಯಾಮಕ್ಕೆ** ಸಮವೆಂದೂ ಹೇಳಿರುವರು. (1ವ್ಯಾಮ = 96ಅಂಗುಲಗಳು)

ಶುಲ್ವಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಎಲ್ಲ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಆಯತಗಳು, ಚತುರ್ಭುಜಗಳು, ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು, ಮುಂತಾದವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

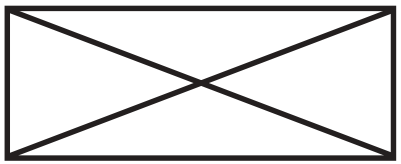
ಇಂದಿಗೂ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳು–

1. ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟಾದರೂ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಬಹುದು.

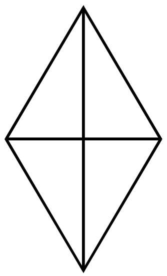
2. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ವ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಬಹುದು.



3.ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಆಯತವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ.



4.ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ.



x_1 ಮದಜಲವನ್ನು ಸುರಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಆನೆಗಳು, x_2 ಮದಜಲವಿಲ್ಲದ ಆನೆಗಳು

x_3 ಹೆಣ್ಣಾನೆಗಳು, x_4 ಆನೆಮರಿಗಳು

$x_2 + x_3 + x_4=30$

$x_3 + x_4 + x_1=36$

$x_4 + x_1 + x_2=49$

$x_1 + x_2 + x_3 =50$

$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 165$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 55$

$x_1=(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)-(x_2 + x_3 + x_4)$
$=55-30=25$

$x_2=(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)-(x_3 + x_4 + x_1)$
$=55-36=19$

$x_3=(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)-(x_2+ x_4 + x_1)$
$=55-49=6$

$x_4=(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)-(x_2+ x_3 + x_1)$
$=55-50=5$

ಒಟ್ಟು ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $=(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)=25+19+6+5$
$=55$

ಹೀಗೆ ಭಾರತೀಯರು ಪ್ರಾಚೀನಕಾಲದಿಂದಲೂ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಣಾತರಾಗಿದ್ದರೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆ ಸಾಕ್ಷಿ ಬೇಕೆ?

ನಿಮಗಿದು ತಿಳಿದಿರಲಿ –

$61x^2 +y^2=1$ ಎನ್ನುವುದೊಂದು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳೇ ಆಗಿವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕ್ರಿ.ಶ. ಹದಿನೇಳನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಫರ್‌ಮ್ಯಾಟ್ ಎಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನೇ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಸಮಸ್ಯೆಯೆಂದು ಫ್ರೆನಿಕಲ್ ಎನ್ನುವವನಿಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಾಗಿ ನೀಡಿದ್ದನು. ಕುತೂಹಲದ ವಿಷಯವೆಂದರೆ ಇಬ್ಬರಿಂದಲೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲಾಗಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅವರಿಗಿಂತ ಐದು ಶತಮಾನಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಶಿಸಿರುವುದು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಅಂಶ.

ಅಭ್ಯಾಸ

I. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿ–

1. $2a + 3 = 15$
2. $3p - 4 = 5$
3. $2 - 4b = -6$
4. $5x - 3 = 0$
5. $4q = 20 - q$

II ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ–

1. **$5x+3=x+3$**
2. **$3p-4=p-5$**
3. **$2y-7/y-5=1/3$**
4. $\frac{4a+3}{3a-1}$
5. $\frac{2p+5}{3p-2} = \frac{4}{9}$

III. **ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳ ಬೆಲೆ ಏನು?**

1. $3x + 4y = 7$
$x + 2y = 3$
2. $2x + y = -1$
$x - y = 8$
3. $5p - 2q = 6$
$3p + 2q = 10$
4. $a - 3b = -2$
$3a + 4b = 7$

ರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಚೀನರ ಪಾಂಡಿತ್ಯದ ಬಗೆಗೆ ಅಲ್ಪ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡೆವು. ಈಗ ರೇಖಾಗಣಿತ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಅವರ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಬಹು ಹಿಂದಿನಿಂದಲೇ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಜರ ಹಿರಿಮೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಅವರು ಯಜ್ಞ–ಯಾಗಾದಿಗಳ ನಿಮಿತ್ತ ವಿವಿಧಾಕಾರದ ಯಜ್ಞಕುಂಡಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಕಾರಣ ಅವರಿಗೆ ವಿವಿಧ ರೇಖಾ ಗಣಿತಾಕೃತಿಗಳು, ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಒಂದಾಕೃತಿಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೆ ರೂಪಾಂತರವನ್ನವರು ತಿಳಿಯಲೇಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಆದಕಾರಣ ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಚಿಂತನ–ಮಂಥನ ನಡೆದು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರೌಢ ವಿಚಾರಗಳು ಮಂಡಿತವಾಗಿವೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ **ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳು** ನಮಗೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿಯಾಗಿವೆ.

ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳು ಯಜ್ಞವೇದಿಕೆಯ ರಚನೆಯ ಕೈಪಿಡಿಗಳು. ಪ್ರಸಕ್ತ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳೆಂದರೆ **ಬೌಧಾಯನ, ಆಪಸ್ತಂಭ, ಕಾತ್ಯಾಯನ, ಮನು, ಮೈತ್ರಾಯಣ, ವಾರಾಹ ಮತ್ತು ವಾಧೂಲ.** ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬೌಧಾಯನ ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರವೇ ಪ್ರಾಚೀನವಾದುದು ಹಾಗೂ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು.

ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿತವಾಗಿರುವ ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯಗಳೆಂದರೆ ರೇಖಾಕೃತಿಗಳು, ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ವೃತ್ತಗಳು, ಒಂದು ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೆ ರೂಪಾಂತರ, ಸಂಯೋಗ ಅಥವಾ ವಿಯೋಗದಿಂದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಣನೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ Ö2 ಮತ್ತು p ಇವುಗಳನ್ನು ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿರುವರು. ಕಾಮ್ಯಚಿತಿಗಳ ವೇದಿಕೆ ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬೌಧಾಯನ ಶುಲ್ವ ಸೂತ್ರವು ವಿವಿಧಾಕಾರಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತವೆ. ಆಪಸ್ತಂಭನೂ ಸಹ ಬೌಧಾಯನ ಮಾರ್ಗವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿರುವನು.

ಕಾತ್ಯಾಯನನ ದೃಷ್ಟಿಕೋನವು ಹೆಚ್ಚು ಶಿಸ್ತಿನದು. ಇವನು ಯಜ್ಞವೇದಿಕೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಅಧಿಕ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವನ್ನು ನೀಡಿರುವನು.

ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲವನ್ನು ನಾವು **ಋಗ್ವೇದ**ದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಗಾರ್ಹಪತ್ಯ ವೇದಿಯು ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿರುವುದು. ಆಹವನೀಯ ವೇದಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಚಚ್ಚೌಕಾಕಾರವಾಗಿರುವುದು. ದಕ್ಷಿಣಾಗ್ನಿ ವೇದಿಕೆಯು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಎಂಬ ಉಲ್ಲೇಖವನ್ನು

5. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 40 ಚ.ಸೆ.ಮೀ. ಆದಾಗ, ಇದರಿಂದ ಫಲಿಸಬಹುದಾದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

6. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 120 ಚ. ಅಡಿಗಳು. ಅದೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ನಿಂತಿರುವ ಆಯತದ ಉದ್ದಗಲಗಳಿಗೆ 7 ಅಡಿ ಅಂತರವಿದ್ದರೆ ಆದರ ಉದ್ದ-ಅಗಲಗಳೇನು?

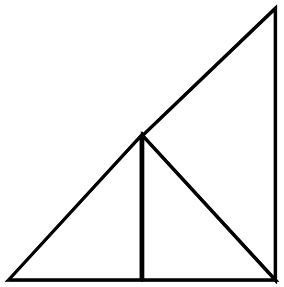
ಚತುರ್ಭುಜಗಳು -

ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳಿಂದಾವೃತವಾಗಿರುವ ಆಕೃತಿಗೆ ಚತುರ್ಭುಜವೆನ್ನುವರು. ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಕೃತಿಗಳುಳ್ಳ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟಾಕೃತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳುಂಟಾಗುವುವು. ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಸಾಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

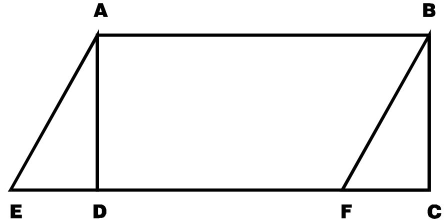
ಈ ಚಿತ್ರವು ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಅಭಿಮುಖವಾದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕರ್ಣವನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು bxh.

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೂ ಪಾದವು ಸಮಾನ. = $bx(h_1+h_2)$ ಈ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾಗಿದೆ. ಇಂತೆಯೇ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $h(a_1+a_2)$[h = ಎತ್ತರ, (a_1+a_2) = ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ.]

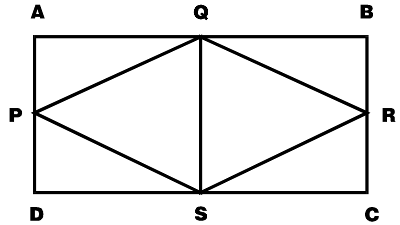
ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯನು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿರುವನು. -



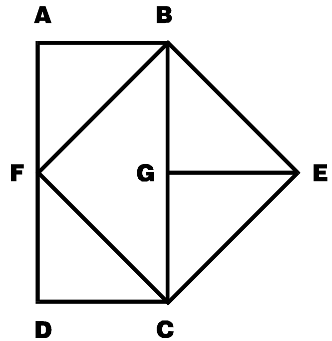
5. ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಆಯತ ಹಾಗೂ ಸಮಾನಾಂತತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



6. ಆಯತದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆಯತದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

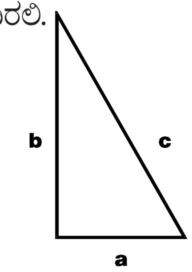


ರೂಪಾಂತರಗಳು -



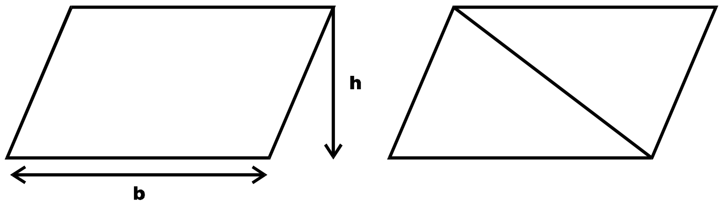
ಬೌಧಾಯನನು ರೂಪಾಂತರಕ್ಕೆ ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾನೆ- ಚೌಕವನ್ನು ಕರ್ಣದಿಂದ ವಿಭಜಿಸಿ. ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಅದನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಆಯತವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವೂ ಒಂದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರವರ್ತಕ **ಕಾತ್ಯಾಯನ**ನೆಂಬುದು ತಿಳಿದಿರಲಿ.



$a^2 + b^2 = c^2$

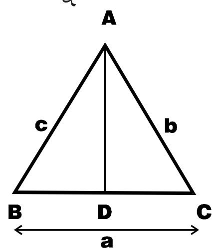
ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದವನು ಕ್ರಿ.ಶ. ಐದನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆರ್ಯಭಟ.



ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು (ಪಾದ xಎತ್ತರ)bxh ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ ಅರ್ಧ ಭಾಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ =½bxh.

ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಕ್ಕೆ ಭಾಸ್ಕರನು (ಪ್ರಥಮ) ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ನೀಡಿರುವನು–

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

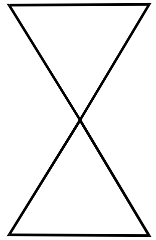


ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ಸೂತ್ರವು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಪಾದ ಹಾಗೂ ಅದರ ಲಂಬವನ್ನು ತಿಳಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲು ಯೋಗ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಲಂಬವನ್ನು ತಿಳಿಸದೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯಿದ್ದಾಗ ಅದರ ಲಂಬವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೇಳಿರುವನು $x=[a+(c^2-b^2)/a]$

$y=[a-(c^2-b^2)/a]$

ಅಥವಾ

ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವನ್ನು ಭುಜಗಳ ಸಂಯೋಗ ಹಾಗೂ ಭುಜದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿರುವನು–



ಇಲ್ಲಿ ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನು ನಿಷಿದ್ಧ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲನಿಯಮವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಿರುವನು–

ಉದ್ದ x ಅಗಲ–ಉದ್ದ x ಅಗಲ ಆದರೆ ಉಭಯ ನಿಷೇಧ; ಏಕನಿಷೇಧ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಇದರ ಭಾಗವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದ=15ಮೀ. ಅಗಲ=12ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೇನು? ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಅರ್ಧವಿರುತ್ತ ದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವೆವು. ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ= ಉದ್ದ x ಅಗಲ =15 12 =180 ಚದುರ ಮೀ. ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಅರ್ಧವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ 180/2=90 ಚದುರ ಮೀ.
2. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 18 ಚ .ಮೀ. ಗಳಾದರೆ, ಅದರಿಂದ ರೂಪಾಂತರ ಹೊಂದಬಹುದಾದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ.
3. ಒಂದು ಸಮಚತುರಸ್ರದಲ್ಲಿ (ಚಚ್ಚೌಕ) ಒಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಅದರ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಚತುರಸ್ರದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 64 ಚ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯೇನು?
4. ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು 10ಅಡಿಗಳಿದ್ದು, ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವು 26ಅಡಿಗಳಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬದ ಅಳತೆಯನ್ನೂ, ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಏಕನಿಷೇಧಿತ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 32 ಚ.ಕಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದಿಂದ ಫಲಿಸಬಹುದಾದ ಆಯತದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

BIBLIOGRAPHY

1. History of Hindu Mathematics - B.B. Datta & A.N. Singh. Vol. I & II.
2. Vedic Mathematics - Jagadguru Sri Bharathi Krishna Thirtha - Pub. : Motilal Banarasidass Edition-1994.
3. Veda Ganitam-S. Haridas-Bharateeya Vidya Bhavan-First Edition-September 2000.
4. Ganitha Sara Sangraha of Mahaveeracharya-Dr. (Smt.) Padmavathamma - Siddhantha Keerthi Grantha Mala - Hombucha 2000.
5. Shutvasutras-S.N.Sea & A.K.Bag-Indian National Science Academy, New Delhi-1983.
6. A concise history of Science in Ancient India-By B.V. Subbarayappa, B.M. Bose & S.N. Sen, Indian National Science Academy, New Delhi.
7. Lilavati of Bhaskaracharya - Translated by Krishnaji Shankara Patwardhan, Somashekhara Amrita Namapally, Shamlal Singh. Motilal Banarsidass, New Delhi. 2001 Edition.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಕರ್ಣ $AC= AD^2 -AM^2$

$CM =CD – DM$

$AC= MC^2 + AM^2$

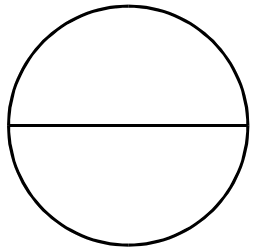
ವೃತ್ತಗಳು –

ವೃತ್ತಪರಿಧಿ ಹಾಗೂ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳ ಜ್ಞಾನ ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಚೀನರಿಗೆ ಇತ್ತು. ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದ 'p' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರ್ಯಭಟನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಿರುವನು–

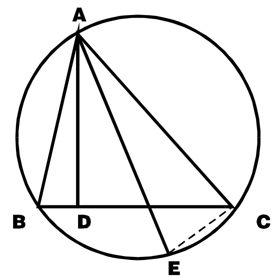
चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम्
अयुतद्वयविष्कम्भम् आसन्नो वृत्तपरिणाहः इति।

ಈ ಶ್ಲೋಕದ ಅರ್ಥ – 'ಸಂಖ್ಯೆ 100 ಮತ್ತು 4ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು 62,000ಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿ, 20,000ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು 3.1416 ಕ್ಕೆ 'ಹತ್ತಿರ' ವಾಗಿದೆ' ಎಂದು. ಅವನು ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟ ತರವಾದ ಮೌಲವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದರೂ ಕೂಡ 'ಸಮೀಪ'ವೆಂಬ ಪದವನ್ನು ಅವನು ಬಳಸಿರುವನು.

$[(100+4) \times 8 + 62000] / 20000 = 3.1416$ ಎಂಬ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವನು.



ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ–



ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆಯತವು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದದ ಲಂಬ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಸಾಧನೆ-

ABC AD BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ . AE ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. CE ಅನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗುವುದು.

ÐACE = ÐABD = 90^0 (ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬ ಕೋನವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

ÐAEC=ÐABD ಎಂದರೆ ÐABC ಎಂದರ್ಥ.

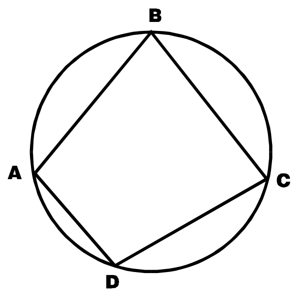
\ ÐCAE=ÐDAB

\ DADB @ DACE

$$\frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{CE}}$$

\ AB.AC =AD.CE

ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ -



ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು **ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ** ಎನಿಸುತ್ತದೆ.

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನೇ ಇದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿರುವನು.

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = Ö(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)

ಈ ಸೂತ್ರವು ಇಂದಿಗೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ S ಎಂದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧ.

ಅಭ್ಯಾಸ

1. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದು, ಪಾದವು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದು, ಒಂದು ಬಾಹುವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನೂ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಈ ಬಾಹುಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಲ್ಲವೇ, ಇಲ್ಲವೇ ತಿಳಿಸಿ.
   1) 3, 4, 5 2) 6, 7, 8 3) 13, 5, 12
   4) 25, 12, 13 5) 10, 8, 6

3. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು 10 ಸೆಂ.ಮೀ., 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹಾಗೂ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನೂ ಹಾಗೂ ಲಂಬವನ್ನೂ ಅಳತೆ ಮಾಡಿ.

4. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು, ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದು, ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದರೆ, 4ನೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಏನು? ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಲೆಖ್ಖಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

5. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು 21 ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.